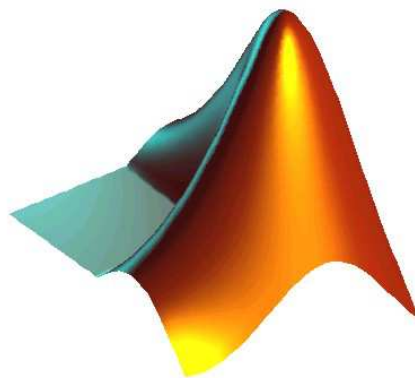


# MATLAB

## TRABAJOS PRÁCTICOS

### DE ÁLGEBRA LINEAL

#### Para carreras de Ingeniería



F. C. E. y T.

U.N.S.E.

Autor: María Inés Morales de Barrionuevo

## **INTRODUCCION**

Normalmente se requiere de modelos computacionales con el fin de resolver problemas de ingeniería. Muchas veces puede ser útil hacer un programa que utilice matrices, complejos, y otras estructuras matemáticas, fácil de escribir y revisar. MATLAB es ideal para esto

El nombre MATLAB proviene de la contracción de MATrix LABoratory. Es un sistema de trabajo interactivo y una herramienta importante para cualquier tarea que requiera cálculos matriciales, ya sea que involucren ecuaciones, sistemas característicos, mínimos cuadrados, etc. y la visualización gráfica de los mismos. Se pueden resolver problemas numéricos relativamente complejos sin necesidad de escribir un programa para ello.

Tiene gran capacidad de expansión ya que permite que el usuario defina sus propias funciones, es por ello que es considerado como un *lenguaje de programación* para cálculos técnicos y científicos donde se encuentran implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica.

MATLAB trabaja esencialmente con un solo tipo de objetos: matrices, con entradas eventualmente complejas. Esto significa que todas las variables representan matrices, de este modo los escalares quedan caracterizados por matrices 1x1 y los vectores, por matrices de una fila o una columna.

Es importante destacar que el alcance y la potencia de MATLAB van más allá de lo que pueda verse en esta serie de trabajos prácticos

### **Características básicas:**

Al ejecutarse MATLAB aparece una ventana, **la ventana de orden**, que es el lugar fundamental donde se interacciona con MATLAB. Cuando esta ventana está activa aparece a la izquierda el símbolo `>>` seguido del cursor, es el indicativo de petición de ordenes del MATLAB.

### **Operaciones aritméticas básicas**

En el cuadro de la página siguiente se ilustran las operaciones aritméticas básicas, el símbolo que emplea MATLAB y un ejemplo:

Operación	Símbolo	Ejemplo
Suma	+	$3 + 6$
Resta	-	$12 - 7.5$
Multiplicación	*	$23.2 * 5.12$
División	/	$77 / 51$
Potencia	^	$5^2$

El orden en que estas operaciones se evalúan en una expresión está dada por la siguiente regla de precedencia:

**Las expresiones se evalúan de izquierda a derecha, con la operación de potencia teniendo el orden de precedencia más alto, seguido por multiplicación y división que tienen ambas igual precedencia y seguidas finalmente, por suma y resta que tienen igual precedencia.**

Se pueden emplear paréntesis para alterar esta usual ordenación, en cuyo caso la evaluación se inicia dentro del paréntesis más interno y procede hacia fuera.

#### Ejercicio:

Para observar como funcionan estas operaciones con MATLAB, resuelva:

- a)  $3^2 + 1 - 2 / 2 * 4$
- b)  $(3^2 + 1 - 2) / 2 * 4$
- c)  $3^{(2 + 1)} - 2 / (2 * 4)$

#### **Variables:**

En MATLAB como en cualquier otro lenguaje de programación, y/o asistente matemático se utilizan variables. Las variables deben tener un nombre según ciertas reglas. Estas reglas son:

- ❖ MATLAB distingue minúsculas de mayúsculas, esto quiere decir que **A** y **a** representan variables diferentes. Si se desea que su utilización sea indistinta se debe tipear la sentencia **casesen**.

- ❖ Las variables pueden contener hasta 19 caracteres y comenzar por una letra seguida de cualquier número de letras, dígitos o guiones de subrayado  
Ejemplo: suma, A, S3, CIRCULO, valor\_propio, etc.
- ❖ Los nombres de variables no pueden contener operadores ni puntos. (No es válido usar /, \*, -, +, ...)

MATLAB cuenta con variables especiales, algunas de ellas son:

- **ans** ( de answer – respuesta-) es la variable que MATLAB crea automáticamente cuando hay una expresión a la que no se le asignó nombre de variable.

Ejemplo: » 2\*5+1.5                    da como respuesta:  
ans =  
11.5000

- **pi**: Razón de una circunferencia y su diámetro

- **inf**: Infinito. Por ejemplo:

» a=1/0  
Warning: Divide by zero.  
a =  
Inf

- **NaN**: Magnitud no numérica. Por ejemplo:

» b=0/0  
Warning: Divide by zero.  
b =  
NaN

- **i y j**: Se emplean para introducir números complejos. Es decir:  $i = j = \sqrt{-1}$

**Nota:** los números complejos se introducen siguiendo el convenio usual, vale decir que

$z_1 = 2 + 3i$ , se introduce como:

>> z1=2+3i

## Ordenes de Propósito General

**Para recordar información:** para poder visualizar cuales variables han sido ya introducidas se tecldea **who**

**Para conocer el contenido de una variable:** simplemente se tipea su nombre y se oprime "enter".

**Para eliminar una variable de la memoria** se utiliza la instrucción **clear** seguida del nombre de la variable( ej: clearA ). Si se escribe clear simplemente se borran todas las variables.

**Help:** Si tecléa help seguido de un comando, función o archivo de MATLAB, aparecerá una descripción del comando.

Por ejemplo: **help** : dará información sobre como puede usar " : " en MATLAB  
**help ref** dará información sobre el comando ref

**Uso de flechas:** Al emplear la flecha  $\uparrow$  se desplazarán los comandos anteriores. Se pueden utilizar las flechas  $\uparrow$ ,  $\downarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$  para localizar un comando y modificarlo y al oprimir la tecla "enter" se ejecuta el comando modificado.

**Comentarios:** Si se inicia una línea con el símbolo %, MATLAB interpretará como un comentario.

Por ejemplo: % Este es un comentario

**Supresión de vista en pantalla:** Si se escribe una instrucción de MATLAB y no se desea ver los resultados desplegados, se finaliza el comando con un ; (punto y coma). Esto es esencial para evitar pérdidas de tiempo al mostrar los resultados intermedios.

Cualquier tipo de cálculo, gráfico o impresión puede detenerse sin salir del programa con CTRL-C.

Cuando se sale de MATLAB, se pierden todas las variables. Para evitarlo se puede utilizar la instrucción **save** antes de salir. Esto hace que las variables se almacenen en el archivo de disco **matlab.mat**. Al ingresar nuevamente a MATLAB se pueden recuperar todas las variables con la instrucción **load**.

### Ejercicios:

1. Realice las siguientes operaciones con MATLAB y verifique las respuestas.

a)  $2 \cdot (9 - 3) + 4$  Rta.: 16

b)  $\frac{5 - (1/2)^2}{0,7 + 1}$  Rta: 2,7941

c)  $(1 - 0,25)^{1/2} + (4/81)^{-1/2}$  Rta: 5,3660

d)  $\sqrt{\sqrt{256} - \sqrt{(1/25)^{-2}}$  Rta: 0 +3i ( **Nota:** sqrt(x) calcula la raíz cuadrada de x )

e)  $\frac{(5-i)^2}{3i} + \sqrt{2-i}$  Rta: -1.8780 - 8.3436i

2. Sean  $a = 4$ ,  $b = -2$ ,  $c = 2/3$  calcule:

a)  $A = a^b - c$

b)  $B = a^{(b-c)}$

3. a) Ingrese la orden who para observar que variables ha introducido.  
 b) Guarde todas las variables, cierre el programa y a continuación vuelva a abrirlo  
 c) Escriba el comando who y apriete "enter". ¿Qué ocurre?  
 d) Escriba el comando load y repita el paso (c)  
 e) Escriba el nombre de alguna variable y apriete "enter" para ver su contenido.  
 f) Guarde solo una de las variables, cierre el programa, vuelva a abrirlo y repita los pasos c) y d).

## ARCHIVOS -M

MATLAB puede ejecutar una sucesión de instrucciones almacenadas en archivos de disco. Estos archivos se denominan **archivos-M** debido a que su extensión deber ser m.

Los archivos-M pueden ser de **comandos** o de **funciones**.

### ❖ Archivos-M de comandos

Estos archivos consisten en una sucesión de instrucciones de MATLAB y son guardados como un simple archivo de texto (salvo que su extensión es m y no txt). Pueden ser usados para introducir gran cantidad de datos o cuando se desea cambiar el valor de una o más variables y reevaluar una serie de órdenes.

Para elaborar un archivo-M se hace click en **New** del menú **File** y se selecciona **M-file**. Aparecerá una nueva ventana para la edición de texto donde se teclea la lista de

comandos de MATLAB. Para guardarlo como archivo-M en el disco, se hace clic en **Save as** del menú **File** y se escribe el nombre del archivo con la extensión m.

Escribiendo simplemente el nombre del archivo (sin la extensión m) en la línea de orden de MATLAB se ejecutarán, línea por línea las órdenes contenidas en el archivo.

Ejemplo: Un archivo-M para calcular el volumen de una esfera

% Volumen de una esfera	Línea de comentario
r = 2.4;	Asigna a la variable r el valor del radio de la esfera
V= (4/3)*pi*r^3;	Calcula el volumen y guarda el resultado en la variable V
disp('El volumen de la esfera es:')	Imprime en pantalla el texto encerrado entre comillas
V	Imprime el valor de V

Si este archivo es guardado con el nombre de *esfera.m* y luego se lo llama desde la ventana de orden tecleando *esfera*, se obtiene:

```
El volumen de la esfera es:
V =
57.9058
```

### Ejercicios:

- Confeccione un archivo-M que calcule el área del triángulo cuya base y altura miden respectivamente 12.34cm y 7.82cm. y guárdelo en el disco
- Llámelo desde la ventana de orden para ver que obtiene.
- Abra nuevamente el archivo haciendo clic en **Open M-file** del menú **file** y luego de seleccionar el nombre del archivo haga clic en **Aceptar**. Modifique los valores de la base y altura del triángulo, guarde el archivo modificado y ejecútelo nuevamente desde la ventana de orden de MATLAB.

### ❖ Archivos -M de función

Estos archivos permiten que el usuario pueda definir sus propias funciones. Son similares a los de comandos pues son archivos de texto que tienen una extensión m.

Los archivos-M de función, como los de comando admiten líneas de comentario que comienzan con un % y no son activas al momento de ejecutarse.

La primera línea activa (no comentario) tiene el siguiente formato obligatorio:

**function**[V1,V2,...,Vn]=nombre\_archivo(a1,a2,...ak)

donde V1, V2, ...,Vn son las variables de salida y a1, a2,...,ak son los argumentos o variables de entrada, que serán asignadas en el mismo orden al convocar la función.

Cuando se tipea help nombre\_archivo aparece en pantalla el primer bloque de líneas de comentario del archivo, en el cual usualmente se describe la función nombre\_archivo.

#### Ejemplo:

El archivo esfera.m del ejemplo anterior puede ser modificado de manera tal que el valor del radio de la esfera pueda ser ingresado directamente desde el teclado.

```
% vol-esf(r) calcula el volumen de una esfera de radio r
function V=vol_esf(r)
V = (4/3)*pi*r^3;
disp('El volumen de la esfera es:')
```

#### **Notas:**

\* Este archivo debe guardarse con el nombre de vol\_esf.m

\* Las líneas de comentario del archivo de función, constituyen el texto visualizado en respuesta a la orden help vol\_esf.

#### Ejercicio 1:

- Guarde el archivo vol\_esf en el disco y desde la ventana de orden de MATLAB escriba V=vol\_esf(5).
- Halle el volumen para diferentes valores de r.

#### Ejercicio 2

Construya un archivo de función que calcule el valor de la función:

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$$



## Trabajo Práctico N°1

### **Introducción de Matrices. Operaciones**

1- Los siguientes ejemplos definen diferentes formas de introducir matrices en MATLAB. Pruebe y saque conclusiones.  
(¡¡CUIDADO!! ... los espacios en blanco tienen su significado)

- a)  $A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]$
- b)  $B=[1\ 2\ 3;4\ 5\ 6;7\ 8\ 9]$
- c)  $C=[1\ 2\ 3$   
     $4\ 5\ 6$   
     $7\ 8\ 9]$
- d)  $D=C'$
- e)  $E=[3\ 0\ 5\ 6]'$
- f)  $F=[1:9]$
- g)  $G=[1:9]'$
- h)  $H=[0:2:12]$
- i)  $I=[-1,3\ \text{sqrt}(3)\ 6.4]$
- j)  $K=[-1\ 2+i;\ i\ -1]$

¿Para que se utiliza " , " ?

¿Para que se utiliza " ; " ?

¿Para que se utiliza " : " ?

¿Para que se utilizan los espacios en blanco?

¿Que ocurre cuando al final de una matriz se escribe " ' " ? ¿Qué significa?

2- Existen funciones en MATLAB como por ejemplo: **rand**, **magic**, **eye**, etc. que proporcionan una forma sencilla para crear matrices con las que se puede experimentar. Introduzca las siguientes matrices y extraiga conclusiones como por ejemplo que la instrucción  $\text{rand}(n)$  y  $\text{rand}(m,n)$  crean matrices  $n \times n$  y  $m \times n$  respectivamente con entradas aleatoriamente generadas distribuidas entre 0 y 1.  $\text{Magic}(n)$  crea una matriz cuadrada de orden  $n$  mágica (las filas y las columnas suman la misma cantidad) con entradas enteras.

- |                       |                      |                        |                     |
|-----------------------|----------------------|------------------------|---------------------|
| a) $\text{rand}(4)$   | d) $\text{eye}(6)$   | g) $\text{ones}(4,7)$  | j) $\text{tril}(A)$ |
| b) $\text{rand}(2,3)$ | e) $\text{eye}(4,2)$ | h) $\text{zeros}(4,5)$ | k) $A(:)$           |
| c) $\text{magic}(3)$  | f) $\text{ones}(6)$  | i) $\text{triu}(C)$    |                     |

3- Genere los siguientes vectores sin introducir explícitamente sus elementos.

- a) Un vector columna cuyos elementos sean números naturales consecutivos entre el 15 y el 28
- b) Un vector fila cuyos elementos sean:  
1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5 y 9.5
- c) Un vector columna tal que su primer elemento sea  $-3$ , su último elemento 2 y los restantes se obtienen incrementando 0.5 al anterior.

4 – Dadas las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Investigue que operaciones son las siguientes:

- a)  $-M$                       b)  $M + N$                       c)  $M - N$   
 d)  $O + M$                       e)  $M * O$                       f)  $M * N$   
 g)  $M .* N$                       h)  $M ./ N$                       i)  $2 * O$   
 j)  $O.^2$                       k)  $O.^2$                       l)  $2/M$   
 ll)  $2./M$                       m)  $M/2$                       n)  $M./2$

¿Siempre es posible realizar dichas operaciones? ¿Qué ocurre cuando no es posible?

5 - Utilice MATLAB a fin de verificar los resultados que obtuvo al operar con matrices en la guía de trabajos prácticos correspondiente

6 - Resuelva usando MATLAB la siguiente situación:

En un bar se preparan 5 tipos de bebidas cuyas recetas se muestran a continuación:

Bebida 1 (Cuba libre)	1 medida de ron 1 refresco de cola
Bebida 2 (Cuba campechana)	1 medida de ron ½ refresco de cola ½ agua mineral
Bebida 3 (Cuba doble)	2 medidas de ron ½ refresco de cola ½ de agua mineral
Bebida 4 (Shandi)	½ cerveza ½ limonada
Bebida 3 (Especialidad de la casa)	1 medida de ron ½ cerveza ½ limonada

- a) Represente los datos en una matriz cuyas filas sean " ingredientes en las bebidas " y cuyas columnas sean " tipos de bebidas ".
- b) La experiencia demuestra que de lunes a jueves se consumen, en promedio por día, 20 bebidas del tipo 1, 30 del tipo 2, 10 del tipo 3, 20 del tipo 4 y 30 del tipo 5, mientras que tanto el viernes como el sábado se consumen 30 bebidas del tipo 1, 40 del tipo 2, 20 del tipo 3, 40 del tipo 4 y 40 del tipo 5. Represente estos datos en una matriz cuyas filas sean " tipos de bebidas " y cuyas columnas sean " días de la semana " .
- c) Use las matrices de los incisos anteriores para obtener una matriz en la que se pueda leer la cantidad de ingredientes consumidos por día. Responda entonces a las siguientes preguntas:
- ¿ Cuántos refrescos de cola se consumen por semana?
  - ¿ Cuántas limonadas?
  - ¿ Cuántas botellas de ron, sabiendo que cada botella rinde 20 medidas?

### Submatrices. Matrices por bloques y matrices aumentadas.

7 - Introduzca las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1.3 & 0 & 5 & 0 \\ -7 & \frac{1}{2} & 4 & 5 \\ 6 & 8 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

En cada uno de los siguientes casos explique lo que obtiene.

- |                                |                                  |                   |
|--------------------------------|----------------------------------|-------------------|
| i) $M = A(2,3)$                | ii) $N = A(3,:)$                 | iii) $O = A(:,3)$ |
| iv) $P = A(:, [1 3])$          | v) $Q = A([2 3], [1 2])$         | vi) $R = [A B]$   |
| vii) $T = [Q; \text{ones}(2)]$ | viii) $S = [P B; \text{eye}(3)]$ |                   |

8 - Introduzca las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a) Forme la matriz ampliada  $C = [A B]$
- b) Forme la matriz  $U$ , que consiste solo en la 2° y 4° columnas de  $A$ .
- c) Forme la matriz  $T$ , que consiste solo en la 1° y 2° filas de  $A$ .
- d) Forme la matriz  $V$ , que consiste solo en las filas 2° y 3° y las columnas 1° y 2° de  $A$

## Trabajo Práctico N°2

### **Determinante. Inversa de una matriz. Sistemas de Ecuaciones**

Para calcular el determinante de una matriz MATLAB cuenta con la función **det**  
**det(A)** calcula el determinante de la matriz cuadrada A.

- 1 - Aplique la función det a cada una de las siguientes matrices y explique la respuesta de MATLAB en cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 0.32 & 4 & -0.5 \\ 2 & 0.23 & -5 & 6 \\ 17 & 0.32 & -4 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1/2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1+5i & 3-i \\ 3 & 2+4i \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

- 2 - Escriba **help inv** a fin de conocer lo que realiza esta función y ver su sintaxis. Para cada una de las matrices del ejercicio anterior aplique inv y explique que obtiene
- 3 - Por análisis de ejemplos estudie la posible validez de las siguientes propiedades:
- Inv(I) = I
  - Si A es inversible, inv(inv(A)) = A
  - Si A y B son inversibles, A\*B es inversible e inv(A\*B) = inv(B)\*inv(A)
- 4 - Es posible encriptar un mensaje secreto usando una matriz cuadrada inversible cuyos elementos y los de su inversa son números enteros, ésta se llama *matriz de código*.

El procedimiento es el siguiente: se asigna a cada letra del abecedario un número (por ejemplo, A=1, B=2, etc., y espacio = 28), se transforma el mensaje asignando a cada letra el número correspondiente, los números obtenidos se ubican de izquierda a derecha en las filas de una matriz M (matriz de mensaje) de tal modo que el número de elementos de cada fila sea igual al orden de la matriz de código, se multiplica M por la matriz de código *por derecha*, se transcribe el mensaje a una cadena de números (que se lee de izquierda a derecha a lo largo de cada fila) y se envía el mensaje.

El receptor del mensaje conoce la matriz de código, arregla el mensaje encriptado en una matriz ubicando los números de izquierda a derecha en cada fila, de modo tal que el número de columnas de dicha matriz coincida con el orden de la matriz de código, multiplica *por derecha* por la inversa de la matriz de código y puede leer el mensaje decodificado.

**Actividad**

Si  $C$  es la matriz de código, decodifique el mensaje que se encuentra más abajo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Mensaje:

128, 107, 167, 55, -235, -206, -279, -39, 232, 188, 347, 183, 273, 194, 412, 274, 272, 221, 353, 126.

\* \* \* \* \*

MATLAB cuenta con dos funciones matriciales que resultan de gran utilidad a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales, ellas son **rank** y **rref**:

**rank(A)** proporciona el rango de la matriz  $A$ .

**rref(A)** devuelve la matriz escalón reducida por filas de  $A$  la cual nos permite obtener un sistema de ecuaciones lineales más simple equivalente al dado.

- 5 - Para cada uno de los sistemas siguientes, llame  $A$  a la matriz de coeficientes y  $B$  a la matriz columna de términos independientes. Forme la matriz ampliada y use la función **rref** para encontrar la forma escalón reducida por filas. Muestre que cada uno de estos sistemas tiene solución única y que la solución está contenida en la última columna de la forma reducida de la matriz ampliada. Use la notación de submatrices para asignar a la variable  $X$  la solución.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y - 3z = 1 \\ 4x - z = -1 \\ 5x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{5}z = -1 \\ \frac{7}{2}x - 3y + 2z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - iy - z = i \\ y - iz = i \\ ix + 2y = 1 + i \end{cases}$$

Calcule  $A \cdot X$  y compare con  $B$

- 6 - Para cada uno de los siguientes sistemas introduzca la matriz ampliada y use la función **rref** para encontrar la forma escalón reducida por filas. Concluya que ninguno tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + z - 4w = 1 \\ x + 3y + 7z + 2w = 2 \\ x - 12y - 11z - 16w = 5 \end{cases}$$

- 7 - Las matrices siguientes son matrices ampliadas de sistemas de ecuaciones que tienen más de una solución.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 9 & 27 & 3 & 3 & 12 \\ 9 & 27 & 10 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3+i & -i & -2 \\ 0 & 2 & 1+i & -i \\ 2 & 1+i & -1-2i & -2+i \end{array} \right]$$

para cada matriz use la función rref. Para obtener el conjunto solución de estos sistemas necesitará papel y lápiz.

Para cada sistema asigne la variable A a la matriz de coeficientes, B a la matriz de términos independientes, dé una solución particular del sistema y asígnele el nombre X. Calcule A\*X y compare con B.

- 8 - Analice si los siguientes sistemas homogéneos son determinados o indeterminados. Resuelva el ejercicio empleando

- la función rref
- la función rank
- Indique cual de las dos formas es la más conveniente en este caso y explique los alcances y limitaciones de ambas funciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z + 3w = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 6w = 0 \\ 3x + 6y - 3z + 9w = 0 \\ x + 3y + z + 2w = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -4x + 2y - 2w = 0 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x + 3y - 4z + 3w = 0 \\ -x + 4z - 4w = 0 \end{array} \right.$$

- 9 - Se pueden resolver sistemas cuadrados  $AX = B$  en los cuales la matriz de coeficientes es invertible realizando  $X = \text{inv}(A) * B$  (Teorema de Cramer).

Confeccione un archivo-M de función que resuelva, cuando sea posible, los siguientes sistemas cuadrados.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

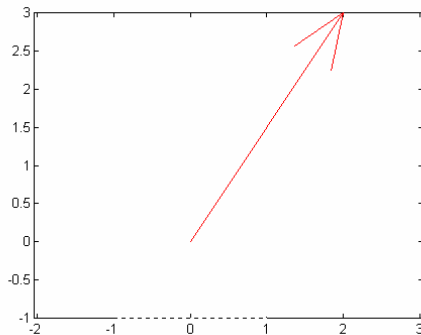
$$b) \quad A1 = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & -3 \\ 1-i & 0 & 2+3i \\ 0 & -i & 2i \end{bmatrix} \quad B1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

## Trabajo Práctico N°3

### **Espacios vectoriales. Combinaciones lineales. Subespacio generado. Dependencia e independencia lineal. Base y dimensión**

Los vectores de  $R^n$  se introducen en MATLAB como matrices de una fila o una columna y se puede operar con ellos de igual modo que con las matrices.

Es posible graficar vectores del plano empleando la función **compass**  
compass(x,y) dibuja una flecha que emana del origen de coordenadas cartesianas y cuyo extremo es el punto del plano (x,y).



Ejemplo:

» compass(2,3)

Produce el siguiente gráfico:

Se puede agregar un tercer argumento a la función compass, encerrado entre comillas, que indica el color o tipo de línea de la flecha, así por ejemplo compass(2,3,'r') realizará el mismo gráfico anterior pero el color de la flecha será rojo.

El siguiente es un cuadro que muestra los caracteres que deben ir encerrados entre comillas para graficar con distintos tipos de colores y puntos o líneas.

<u>Colores</u>		<u>Tipos de punto o línea</u>	
Y	amarillo	.	punto
m	violeta	o	círculo
c	celeste	x	cruz
r	rojo	+	más
g	verde	—	línea llena
b	azul	-.	punto y trazo
w	blanco	--	línea de trazos
k	negro	:	línea de puntos

Algunas funciones importantes de MATLAB necesarias cuando se quieren realizar gráficas:

La instrucción **grid** realiza un cuadrículado del gráfico actual.

Pueden ponerse títulos, comentarios en los ejes o en cualquier otra parte con los siguientes comandos que tienen una cadena como argumento:

- title** título del gráfico. Ej: title('Vectores')
- xlabel** comentario en el eje x. Ej: xlabel('Eje x')
- ylabel** comentario en el eje y. Ej: ylabel('Eje y')
- gtext** texto posicionado con el mouse. Ej: gtext('v=(2,3)')
- text** texto posicionado mediante coordenadas Ej: text(2,3, 'v=(2,3)')

**hold** se emplea cuando se desea ver simultáneamente dos o más gráficos en una misma figura, hold on congela la pantalla gráfica actual de forma que las gráficas posteriores se superponen en ella. Escribiendo hold off se libera el "hold".

1 - Ingrese el siguiente grupo de sentencias y observe el gráfico obtenido

- » compass(2,3)
- » hold on
- » compass(1,-1)
- » compass(1/2,-3)
- » hold off

2 - Dados los vectores  $u = (2,4)$  y  $v = (-3,2)$

a) Resuelva con MATLAB las siguientes operaciones:

$$u + v, \quad u - v, \quad 2u + 5v, \quad 1/2v$$

b) Grafique en una misma figura, los vectores dados y los obtenidos de resolver las operaciones anteriores, de tal manera que se diferencien entre si ya sea por el color o tipo de línea. Ponga títulos y nombre a los vectores.

3 - Escriba al vector  $s$  como combinación lineal de los vectores  $s_1$  y  $s_2$ . Utilice la función `ref` para determinar los escalares.

$$s = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4 - Determine en cada caso si el vector  $v$  pertenece al subespacio generado por el conjunto dado. Resuelva el problema de dos maneras diferentes: empleando la función `ref` y luego la función `rank`. Explique cual es la más conveniente para este caso en particular.

$$a) \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$b) v = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

5 - Determine si los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  generan al espacio vectorial  $V$ .

$$a) u = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 15 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 14 \end{bmatrix} \quad V = \mathbb{R}^{1 \times 3}$$

$$b) u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad V = \mathbb{R}^{1 \times 4}$$

6 - Determine en cada caso si el conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es linealmente independiente o linealmente dependiente, considerando los respectivos espacios sobre el cuerpo de los números reales.

$$a) v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c) v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -0.8 \\ 7 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

7 - Determine si los siguientes conjuntos constituyen una base del espacio vectorial dado:

$$a) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^{1 \times 4}$$

$$b) \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

8 - Dada la base  $B = \{(1,2,3), (-1,0,7), (7,5,0)\}$  de  $\mathbb{R}^3$

Halle las coordenadas de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  respecto de la base dada. Realice el cálculo para los tres vectores en un solo procedimiento.

$$v_1 = (1,2,3) \quad v_2 = (0,-3,12) \quad v_3 = (-7, 2,-8)$$

## Trabajo Práctico N°4

### **Producto Interior. Norma. Ángulo. Conjuntos Ortogonales y Ortonormales**

Si  $x$  e  $y$  son dos vectores fila o columna de la misma dimensión, **dot(x,y)** calcula el producto escalar de los vectores  $x$  e  $y$

1 - Halle el producto escalar de  $u$  y  $v$  en cada caso

a)  $u = (2,-3,0)$   $v = (0,-1,8)$

b)  $u = (0.2,-5,67,4)$   $v = (1/9,2.75,0,-5)$

c)  $u = (0.73,-1)$   $v = (-2,0)$

2 - La norma de un vector se puede calcular de diferentes maneras:  
Proponga un vector  $v$  de cuatro componentes y calcule:

a)  $\text{dot}(v,v)^{(1/2)}$  ¿Que operaciones realiza?

b)  $\text{sqrt}(\text{dot}(v,v))$  ¿Que operaciones realiza?

c)  $\text{norm}(v,2)$

d) Compare los resultados y repita el ejercicio para vectores de más componentes.

3 - Dados  $v = [1 \ -1]$  y  $w = [2 \ -3]$

Calcule:

a) El versor de  $v$

b) Un vector paralelo a  $v$  de módulo 5

c) Un vector paralelo a  $w$  de módulo 3

d) La distancia de  $v$  a  $w$

e) La proyección de  $v$  sobre  $w$ . Utilizando el valor encontrado halle un vector ortogonal a  $w$

Realice una gráfica de los vectores  $v$  y  $w$  y de cada uno de los vectores resultantes de cada ítem, todos en la misma figura para poder comparar.

4 - Calcule la medida del ángulo entre  $v$  y  $w$  para los vectores del ejercicio anterior. (Ayuda: MATLAB cuenta con la función **acos**, tal que  $\text{acos}(x)$  da la medida del ángulo cuyo coseno es  $x$  expresado en radianes).

5 - MATLAB cuenta en su librería con la función matricial **trace** que calcula la traza de una matriz cuadrada. Para los siguientes pares de matrices calcule el producto interior definido como  $A \cdot B = \text{Tr}(B^t \cdot A)$

$$a) A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1/2 \\ 7 & 42 & 21 \\ -4 & 1/2 & 2/5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -12 & 5 & -4 \\ 1/7 & 6 & -20 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

6 - Calcule la norma de cada una de las matrices del ejercicio anterior.

7 - Determine cuales de los siguientes conjuntos son ortogonales y cuales ortonormales:

a)  $\{ (3, -1, 4, 0), (1, 0, -3/4, 5), (-5, -15, 0, 1) \}$

b)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4/5 \end{bmatrix} \right\}$

c)  $\left\{ [-1/\sqrt{30} \ 5/\sqrt{30} \ -2/\sqrt{30}], [2/\sqrt{5} \ 0 \ -1/\sqrt{5}], [1/\sqrt{6} \ 2/\sqrt{6} \ 2/\sqrt{6}] \right\}$

8 - Para obtener bases ortonormales de un espacio vectorial, MATLAB cuenta con la función **orth**.

**orth(A)** da una base ortonormal del subespacio generado por las columnas de la matriz A.

Realice lo siguiente:

a) Introduzca la matriz  $A = [1 \ 2; 0 \ 4]$

b) Escriba  $B = \text{orth}(A)$

c) Verifique que las columnas de B generan al subespacio columna de A y que son linealmente independientes. Es decir, que forman una base.

d) Realice el producto interior de los vectores columnas de B y calcule sus normas a fin de verificar que dicha base es ortonormal.

9 - Determine una base ortonormal para los siguientes subespacios:

a) El subespacio generado por  $v_1 = (-2, 3, -1)$ ,  $v_2 = (0, -2, 2)$ .

b) El subespacio generado por  $v_1 = (-2, 5, 0, 4)$ ,  $v_2 = (1, 1, 2, -1)$ ,  $v_3 = (1, 0, 0, 0)$

c)  $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0 \}$

## Trabajo Práctico N° 5

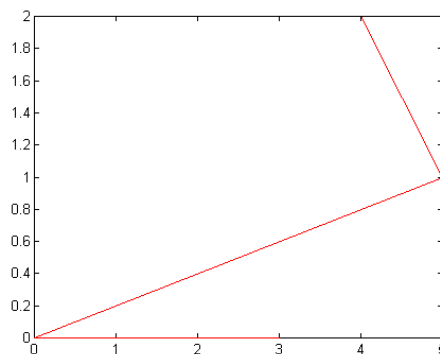
### Recta y Plano

#### ➤ Gráficos con MATLAB en el plano

Introduzca los vectores fila  $u=[3\ 0\ 5\ 4]$ ,  $v=[0\ 0\ 1\ 2]$  y a continuación escriba `plot(u,v)`, oprima enter y observe que ocurre.

En este caso el comando **plot** representa una biyección entre los elementos de  $u$  y los elementos del  $v$ . En los ejes aparece una porción de escala necesaria (auto-escalado) para que se puedan representar las componentes de los vectores dados.

El comando `plot` grafica entonces en este caso los puntos  $(3,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(5,1)$  y  $(4,2)$  y dibuja un segmento de recta entre los consecutivos como lo muestra la figura:



Proponga vectores con gran diferencia de valores (positivos y negativos) y observe la "acomodación" de las escalas.

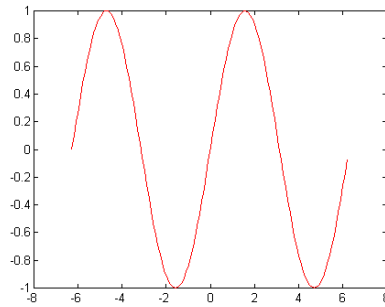
#### ➤ Gráfica de funciones

Se desea graficar la función seno en el intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ . Para ello se escriben las siguientes instrucciones:

```
» x=-2*pi:0.1:2*pi;
» y=sin(x);
» plot(x,y)
```

El vector  $x$  es una partición del dominio con incremento de 0.1, mientras que  $y$  es un vector con los valores que toma el seno en los puntos de esa partición.

Este conjunto de instrucciones produce el siguiente gráfico:



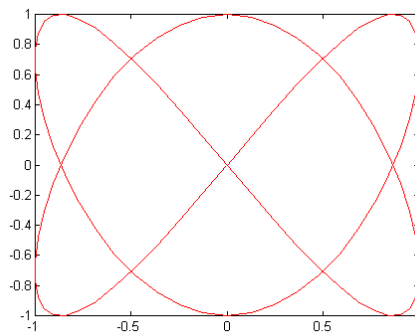
Pueden también realizarse gráficas de curvas definidas paramétricamente. Por ejemplo:

```

» t=0:2*pi/100:2*pi;
» x=sin(2*t);
» y=sin(3*t);
» plot(x,y)

```

produce el gráfico:



Veamos a modo de ejemplo como graficar la elipse cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Esta elipse tiene por centro a  $C = (0,0)$ , la longitud del semieje mayor es 3, del semieje menor es 2, su eje focal se encuentra sobre el eje X, sus vértices son  $A = (3, 0)$ ,  $A' = (-3, 0)$ . Para realizar la gráfica, se dan valores a x y éstos deben incluir las abscisas de los vértices de modo que pueda verse en el gráfico la elipse completa y no una porción de ella, Por lo tanto se tomarán los elementos del vector x en el intervalo  $[-3, 3]$ . Por otra parte, el vector y debe estar expresado en función de x.

Entonces, despejando y se tiene que:

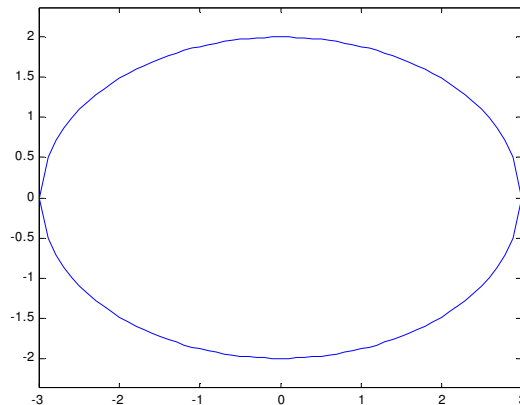
$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$$

Por lo tanto las instrucciones siguientes producirán el gráfico de la elipse dada.

```

» x=-3:1:3;
» y1=sqrt(4-4/9*x.^2);
» y2=-sqrt(4-4/9*x.^2);
» plot(x,y1)
» hold on
» plot(x,y2)
» axis equal

```



De manera similar se puede graficar cualquier cónica

### Ejercicio:

Realice el gráfico de las siguientes rectas de  $\mathbb{R}^2$  de modo tal que en cada eje aparezcan escritos sus nombres 'X' e 'Y', el título del gráfico sea "Recta", sobre la recta se vea escrita su ecuación y la gráfica esté cuadrículada. De la observación de la figura identifique algunos puntos pertenecientes a cada recta. (Nota: tenga en cuenta que para graficar una recta son necesarios solo dos puntos).

a)  $y = 2x - 3$     b)  $y = 4x$     c)  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 3t \end{cases}$     d)  $(x,y) = t(1,2)$

(Tenga en cuenta en el punto (d) que la ecuación vectorial debe expresarse en forma paramétrica o cartesiana)

Existen dos formas en las que se puede realizar una graficación simultanea de curvas. Esto es importante cuando se quieren comparar los gráficos de dos o más funciones:

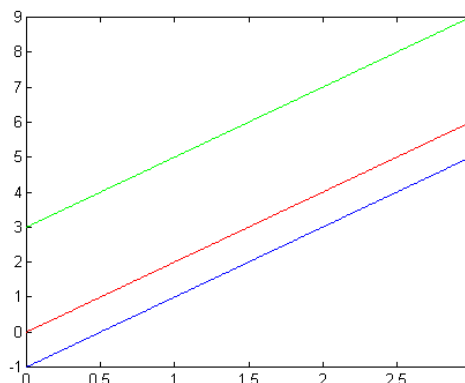
Ejemplo:

```

» x=[0 3];
» y1=2*x;
» y2=2*x-1
»plot(x,y1,x,y2)

```

Produce el gráfico:



Otra forma es usando el comando **hold**,

Ejemplo:

```
» x=[0 3];
» y1= 2*x;
» plot(x,y1)
» hold on
» y2=-3*x+4;
» plot(x,y2)
» y3= (-1/2)*x
» plot(x,y3)
» hold off
```

Escriba la lista precedente de instrucciones y observe lo que obtiene.

Por defecto los ejes se autoescalán. Si se desea cambiar la escala se usa el comando **axis**

Si  $C=[X_{\min} \ X_{\max} \ Y_{\min} \ Y_{\max}]$  es un vector de cuatro elementos donde  $X_{\min}$ ,  $X_{\max}$  son los valores mínimo y máximo respectivamente que se toman sobre el eje X y  $Y_{\min}$ ,  $Y_{\max}$ , son los valores mínimo y máximo que se toman sobre el eje Y, axis(c) establece el escalado de los ejes a los límites prescritos

**axis** sin argumento congela el escalado actual para los gráficos siguientes y escribiendo axis nuevamente, se vuelve al autoescalado.

**axis('equal')** produce separaciones de igual medida en los dos ejes.

### Ejercicios:

1 - Dé las ecuaciones de cuatro rectas paralelas tal que una de ellas contenga al origen. Gráfiquelas en una misma figura de forma que:

- El título de la figura sea "Rectas paralelas"
- Los ejes estén identificados con "x" e "y"
- La gráfica aparezca cuadriculada.
- En cada recta aparezca su ecuación
- La escala en ambos ejes sea la misma.

2 - Realice la gráfica de los siguientes pares de rectas y determine su punto de intersección a partir de la figura. Luego calcule, usando MATLAB, mediante sistemas de ecuaciones la intersección de dichas rectas y compare resultados.

a)  $L_1: y = 2x - 5$   
 $L_2: y = 1/3 x - 5/3$

b)  $L_1: y = -7x$   
 $L_2: y = x$

$$c) \quad L_1: \begin{cases} x - 4 = t \\ y = -t \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x - 1 = -1/2 t \\ y = -t \end{cases}$$

3 - Las siguientes rectas son ortogonales:

$$L_1: y = 2x - 5 \quad L_2: y = -1/2x$$

- Realice la gráfica de ambas rectas en la misma figura, cuadrícupe y observe si éstas "se ven" perpendiculares.
- Escriba ahora la instrucción axis('equal') y vea que ocurre.
- Explique la diferencia entre los items a) y b).

4 - Escriba la ecuación de la recta que contiene al origen y es ortogonal a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x - 2 = 3t \\ y = -t \end{cases}$$

Como en el caso anterior verifique lo obtenido (tenga en cuenta que en este caso deberá graficar dos rectas).

### ➤ Gráficos con MATLAB en el espacio

La instrucción **mesh** crea en un gráfico tridimensional una superficie de malla que está definida por las terceras componentes de los puntos sobre una cuadrícula rectangular en el plano XY.

Para realizar el gráfico de una función se debe definir en primer lugar los vectores x e y que dan la partición del rectángulo (es decir se define el dominio) con la función **meshgrid**.

Ejemplo 1:

```

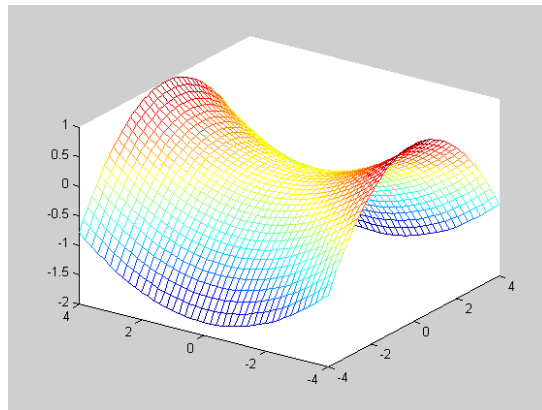
» [x y]=meshgrid(-4:0.2:4); % genera una rejilla rectangular de puntos
                                % igualmente espaciados entre -4 y 4 en cada eje.
» z=y.^2/16-x.^2/9;
» mesh(x,y,z)

```

Este conjunto de instrucciones genera la gráfica del paraboloides hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} \text{ sobre el rectángulo } [-4,4] \times [-4,4] \text{ que se muestra en la figura siguiente:}$$

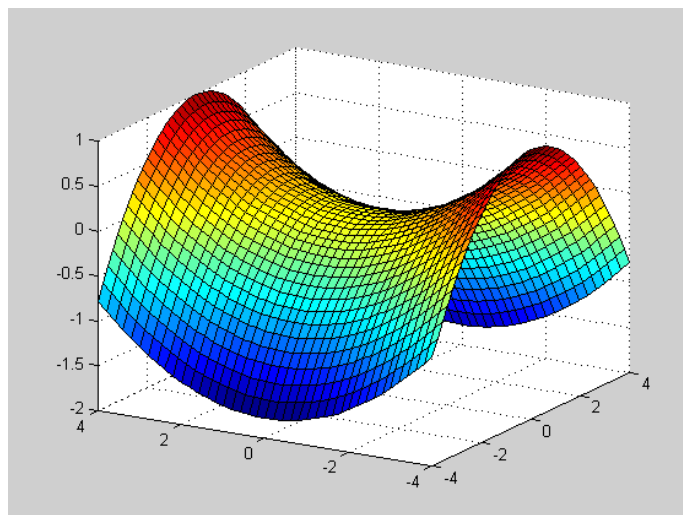




Un **gráfico de superficie** de la misma función se obtiene con la función **surf** en lugar de mesh. Por lo que:

» surf(x,y,z)

producirá el gráfico siguiente:

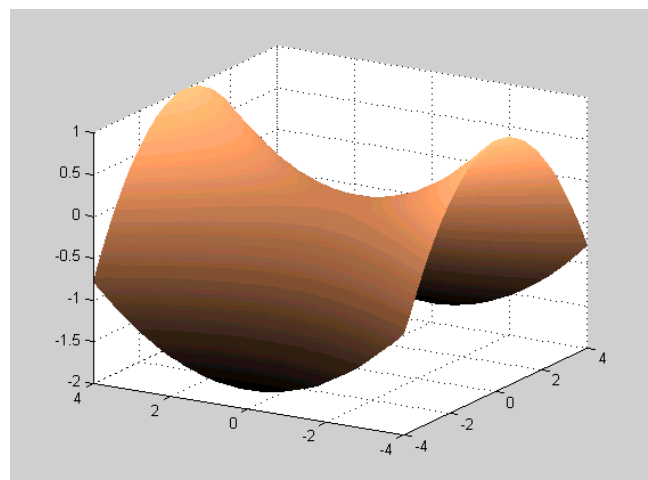


Y si se le agregan las sentencias:

» shading interp

» colormap(copper)

se produce:



Del igual modo se pueden graficar otras cuádricas.

Ejercicio: Escriba las siguientes instrucciones en MATLAB

```
» [x y] = meshgrid(-2:0.1:2);  
» z= -x + y - 1;  
» surf(x,y,z)
```

¿Qué figura obtiene?

**Nota:** Los comandos axis, hold, grid, title, xlabel, ylabel, zlabel, etc. tienen en este caso la misma aplicación.

**Ejercicios:**

5 - Realice el gráfico de los siguientes planos, de tal modo que en cada eje esté escrito su nombre (X, Y y Z) y el gráfico esté cuadrículado.

- a)  $2x + 3y - z = 2$
- b)  $x + y - z = 0$
- c)  $x - z = 5$

6 - Se desea realizar la gráfica del plano  $x = 3$

Tenga en cuenta que la información que nos brinda esta ecuación es que mientras  $y$  y  $z$  varían en todos los reales  $x$  toma siempre el valor 3. Luego el conjunto de instrucciones que se deben escribir varían ligeramente de las dadas anteriormente. En este caso se definirán primero los valores para  $y$  y  $z$  ya que éstas no dependen de ninguna variable, y se escribirá:

```
» [y z]=meshgrid(-2:0.2:3);  
»x=0*y+0*z+3;  
»mesh(x,y,z)
```

¿Por qué se escribe  $x=0*y+0*z+3$  y no  $x=3$  simplemente? Haga la prueba usando esta instrucción y vea que ocurre.

7 - Realice la gráfica de los siguientes planos:

- a) El plano paralelo al plano XY que contenga al punto (0,1,3)
- b) El plano paralelo al eje X que contenga al punto (-1,1,5)
- c) El plano YZ
- d) Un plano que contenga al eje X

8 - En cada uno de los siguientes casos grafique los planos dados en una misma figura (use hold on y hold off) y observe su posición relativa. Resuelva también en cada

caso, usando MATLAB, el sistema formado por las ecuaciones de dichos planos. Compare la posición relativa con la compatibilidad o incompatibilidad del sistema, con el hecho de ser determinado o indeterminado y con el rango de la matriz de coeficientes. Extraiga conclusiones.

- a)  $\Pi_1: 2x + 3y - 2z = 0$        $\Pi_2: 5x - y + 4z = 0$
- b)  $\Pi_1: x + y - z + 10 = 0$        $\Pi_2: 2x + 2y - 2z = 0$
- c)  $\Pi_1: x + 3y - 2z = 0$        $\Pi_2: -x + 5y + 3z - 1 = 0$        $\Pi_3: 8y + z - 1 = 0$
- d)  $\Pi_1: 5x - 2y + z - 3 = 0$        $\Pi_2: -x + z = 0$        $\Pi_3: 2x - 2z - 20 = 0$

Realice los gráficos sobre el rectángulo  $[-4,4] \times [-4,4]$

### ➤ Gráfica de rectas en el espacio

Como pudo observar, con el comando mesh se realiza la gráfica de una superficie de malla en el espacio tridimensional, de modo que podemos, mediante este comando, "ver" la recta pero solo como la intersección de dos planos.

Para graficar una recta en el espacio se emplea el comando **plot3**, que es una extensión del comando plot a gráficos en el espacio tridimensional.

Ejemplo:

Se desea graficar la recta que contiene al punto  $(1,0,3)$  y es paralela al vector  $(-1,1,2)$ .

La ecuación vectorial de esta recta es  $(x,y,z) = (1,0,3) + t(-1,1,2)$

Y las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

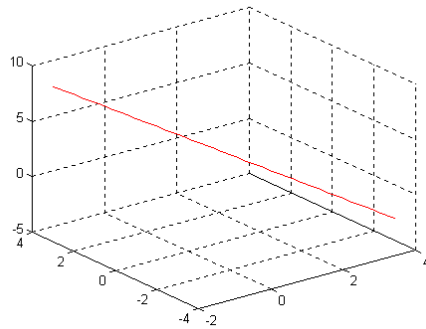
Se puede realizar la gráfica empleando las ecuaciones paramétricas del siguiente modo:

```

»t = -3:0.1:3;
»x = 1-t; y = t; z = 3+2*t;
»plot3(x,y,z)

```

Si se agrega la instrucción `grid` puede verse el gráfico cuadrículado



Puede realizarse también la gráfica empleando las ecuaciones cartesianas de la recta, en este caso son :

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}$$

Es importante tener en cuenta que para graficar una recta con `plot3` a partir de sus ecuaciones cartesianas, éstas deben estar expresadas de tal forma que dos de las variables, estén en función de una misma (por ejemplo  $y$  y  $z$  en función de  $x$ ). En este caso las ecuaciones cartesianas quedarían expresadas:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = -2x + 5 \end{cases}$$

Escriba `hold on` para graficar en la misma figura y así poder verificar si efectivamente se obtiene la misma recta, luego escriba las siguientes instrucciones:

```
x=-3:0.1:3;
y=-x+1;
z=-2*x+5;
plot3(x,y,z,'b')
hold off
```

El argumento 'b' en `plot3` significa que la recta se graficará en color azul.

9 - Realice el gráfico de las siguientes rectas:

- La recta que contiene al origen y es paralela al vector  $(-1, 2, 6)$
- La recta que contiene al punto  $(-2, 0, 2)$  y es paralela al eje X.
- La recta que contiene al punto  $(1, 1, 1)$  y es ortogonal al plano XY.

d) La recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

(Sugerencia: pase primero estas ecuaciones a la forma paramétrica)

10 - En cada uno de los siguientes casos realice los gráficos de la recta y el plano dados, en una misma figura y analice su posición relativa. Luego resuelva el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano, empleando MATLAB, y extraiga conclusiones (Sugerencia: en este caso es aconsejable que trabaje con las ecuaciones cartesianas de la recta)

$$\text{a) } L: \frac{x-5}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-1}{5} \quad \Pi: 2x - 3y + 5z = 0$$

$$\text{a) } L: (x,y,z) = (1,-1,0) + t(1,1,0)$$

$$\Pi: z = 3$$

$$\text{b) } \begin{cases} x-1 = t \\ y = -t \\ z-2 = 5t \end{cases} \quad \Pi: 5x - z - 3 = 0$$

## Trabajo Práctico N° 6

### **Transformaciones lineales.**

1 - Halle la matriz asociada a la transformación lineal dada respecto de las bases B y B'. Tenga en cuenta que primero deberá trabajar con papel y lápiz hasta formar los sistemas de ecuaciones, que tendrán la misma matriz de coeficientes pero variarán en sus términos independientes.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y,z) = (x,z)$$

$$B = \left\{ (-1,2,0), (1,0,3), (0,1,3) \right\} \quad B' = \left\{ (1,2), (-1,1) \right\}$$

Observe la matriz ampliada que ha formado con las tres columnas de términos independientes. ¿Qué vectores están ubicados en las columnas de la matriz de coeficientes? ¿Qué vectores están ubicados en las columnas de términos independientes? Luego de aplicar rref a la matriz ampliada ¿qué matriz representa la submatriz formada por las tres últimas columnas?

De estas observaciones, confeccione una regla que le permita en lo sucesivo trabajar menos con papel y lápiz.

1 - En cada uno de los siguientes casos halle la matriz asociada a la transformación lineal dada respecto de las bases B y B'.

a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x, y) = (x, x+y, 2y)$

$$B = \left\{ (2,3), (-1,5) \right\} \quad B' = \left\{ (1,2,3), (-3,-3,-3), (2,0,1) \right\}$$

b)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(-2,3,1) = (0,1,2), \quad f(1,1,1) = (-3, 5,2), \quad f(0, 0, 1) = (1,0,1)$$

$$B = \left\{ (-2,3,1), (1,1,1), (0,0,1) \right\} \quad B' = \left\{ (1,2,0), (0,1,2), (0,0,3) \right\}$$

2 - Construya un archivo de función tal que, dada la matriz asociada a una transformación lineal respecto de las bases canónicas, calcule la imagen de un vector.

3 - Sea A la matriz asociada a una transformación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  respecto de las bases canónicas en ambos espacios.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Use el archivo creado en el ejercicio anterior a fin de calcular la imagen de los siguientes vectores:

a)  $f(0,-1)$

b)  $f(3,-4)$

c)  $f((0,0))$

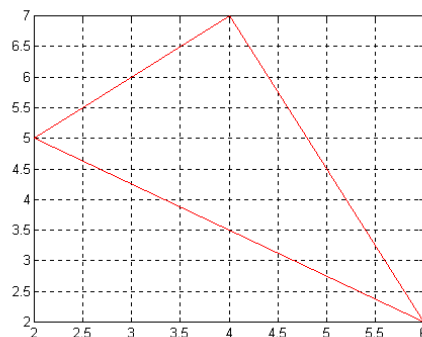
### ➤ **Modificación de figuras del plano por medio de transformaciones lineales.**

Si se escriben siguientes instrucciones de MATLAB se obtiene el gráfico de un triángulo:

» `x=[2 4 6 2];y=[5 7 2 5];`

» `plot (x,y)`

» `grid`



Recuerde que plot grafica los puntos de una biyección entre x e y, en este caso (2,5), (4,7), (6,2) y (2,5), y los une con un segmento de recta. Como puede observarse en la

gráfica estos puntos son justamente los vértices de un triángulo. Por lo tanto si se desea dibujar un triángulo conociendo sus vértices se forman los vectores  $x$  e  $y$  de tal manera que los elementos de  $x$  sean las abscisas y los elementos de  $y$  sean las ordenadas de cada punto. Observe que el primer elemento debe repetirse al final tanto en  $x$  como en  $y$ , porque si esto no ocurriera plot no uniría el último vértice con el primero. Pruebe realizando la gráfica para los vectores  $x$  e  $y$  dados pero sin el último elemento.

### Ejercicio:

Dibuje las siguientes figuras, respetando el orden en el que están dados los vértices:

- El triángulo de vértices  $(-1,3)$ ,  $(0,0)$ ,  $(3,-2)$
- El paralelogramo de vértices  $(1,-2)$ ,  $(2,1)$ ,  $(6,1)$ ,  $(5,-2)$
- El polígono de vértices  $(-3,0)$ ,  $(-1,2)$ ,  $(2,2)$ ,  $(4,-2)$ ,  $(0,-5)$
- Modifique el orden dado a los vértices en el ítem c) y observe la figura que obtiene. Extraiga una conclusión.

**Dada una figura en el plano se desea “ver” que efectos produce sobre ella determinada transformación lineal:**

### Ejemplo:

La transformación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (3x, y)$  produce una expansión a lo largo del eje  $X$ .

La matriz asociada a esta transformación lineal respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, se desea aplicar esta transformación lineal al triángulo de vértices  $P=(0,0)$ ,  $Q = (2,5)$  y  $R = (6,3)$ .

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1° - Se introducen los vectores  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Es conveniente que éstos sean expresados como vectores columnas, ya que posteriormente deberán multiplicarse por la matriz  $A$ .

2°- Se construye una matriz  $T$  cuyas columnas son  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Esta matriz tiene como primera fila a las abscisas de los vértices y como segunda fila a las ordenadas.

3° - Se forman los vectores  $x$  de las abscisas e  $y$  de las ordenadas de los vértices y se realiza la gráfica del triángulo.

4°- Se realiza el producto  $A*T$  a fin de obtener las imágenes.

5°-Se construyen los vectores  $x1$  de las abscisas e  $y1$  de las ordenadas de las imágenes y se realiza la gráfica, en una misma figura, del transformado del triángulo.

Las instrucciones correspondientes son:

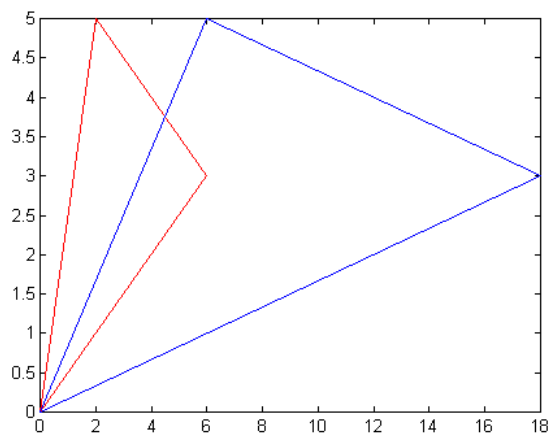
$$1^\circ \left\{ \begin{array}{l} P=[0 \ 0]'; Q=[2 \ 5]'; R=[6 \ 3]'; \end{array} \right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{array}{l} T=[P \ Q \ R \ P] \end{array} \right.$$

$$3^\circ \left\{ \begin{array}{l} x=T(1, :); y=T(2, :); \\ \text{plot}(x,y) \end{array} \right.$$

$$4^\circ \left\{ \begin{array}{l} A=[3 \ 0 \\ 0 \ 1]; \\ \text{Im}=A*T; \end{array} \right.$$

$$5^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{hold on} \\ x1=\text{Im}(1, :); y1=\text{Im}(2, :); \\ \text{plot}(x1,y1,'g') \end{array} \right.$$



Realice a continuación para el mismo triángulo y siempre en la misma figura del MATLAB una expansión a lo largo del eje Y con un factor igual a 2.

La matriz asociada a esta transformación lineal respecto de la base canónica es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



De la misma forma en que se aplica una transformación lineal a una figura del plano, puede también aplicarse a curvas planas, el procedimiento es similar solo que se trabaja con una mayor cantidad de puntos.

Suponga que se desea aplicar una rotación un ángulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$  a la porción de la parábola  $y = 4x^2 + 2$  correspondiente al intervalo  $[-2,2]$  y teniendo en cuenta que la matriz de

rotación es  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \text{sen} \frac{\pi}{4} \\ -\text{sen} \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ , el siguiente conjunto de instrucciones producirán lo deseado.

```
» x=-2:.2:2;
» y=4*x.^2+2;
» plot(x,y)
» hold on
```

dibuja la parábola original

```
» m=[cos(pi/4) sin(pi/4);-sin(pi/4) cos(pi/4)];
```

Introduce la matriz asociada

```
» puntos=[x;y];
```

forma una matriz cuya primera fila está compuesta por las abscisas y la segunda por las ordenadas de los puntos de la parábola

```
» puntos_imag=m*puntos;
```

Calcula la imagen de dichos puntos

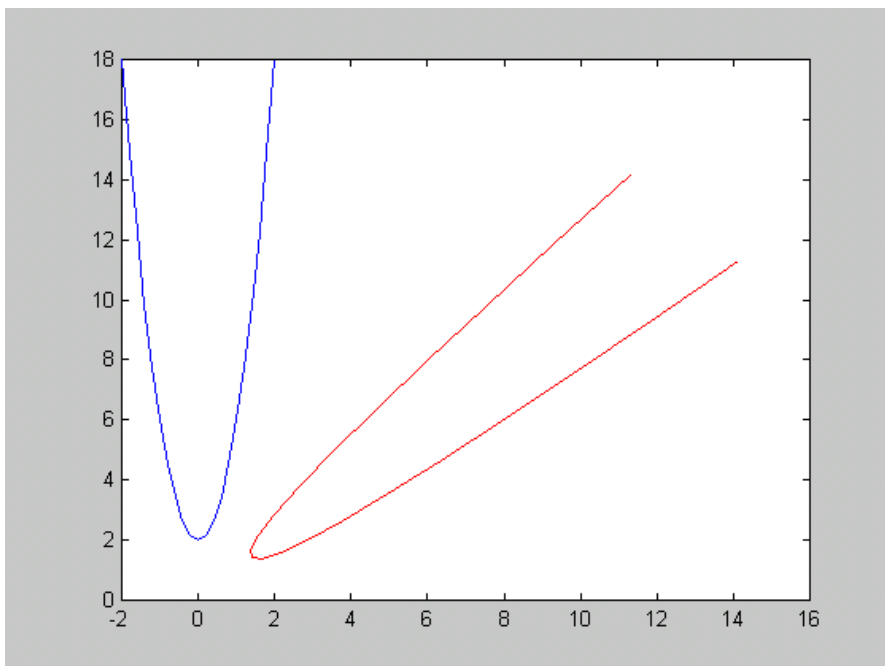
```
» x1=puntos_imag(1,:);
```

Forma el vector fila de las abscisas de los puntos imagen

```
» y1=puntos_imag(2,:);
```

Forma el vector fila de las ordenadas de los puntos imagen

```
» plot(x1,y1,'r')
```



En el siguiente cuadro figuran las matrices asociadas respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  de algunas transformaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expansión por un factor  $k$ , a lo largo del eje X si  $k > 1$   
 Contracción por un factor  $k$ , a lo largo del eje X si  $0 < k < 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Expansión por un factor  $k$ , a lo largo del eje Y si  $k > 1$   
 Contracción por un factor  $k$ , a lo largo del eje Y si  $0 < k < 1$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Expansión por un factor  $k$ , en ambas direcciones si  $k > 1$   
 Contracción por un factor  $k$ , en ambas direcciones si  $0 < k < 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reflexión respecto del eje X

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexión respecto del eje Y

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotación con centro en el origen de coordenadas y ángulo  $\theta$

### Ejercicios:

- 4 - Construya un archivo-M para que dibuje el cuadrilátero de vértices  $(0,1)$ ,  $(2,4)$ ,  $(4,4)$ ,  $(6,1)$  en ese orden y luego aplique a éste las siguientes transformaciones lineales, de modo que todos los gráficos se vean en una misma figura, recuerde que para diferenciarlos puede usar distintos tipos de líneas y/o colores.
- a) Expansión por un factor 5 a lo largo del eje Y.

- b) Contracción por un factor 1/2 en ambas direcciones.
- c) Reflexión respecto del eje X

5 - Modifique el archivo anterior para que dibuje la figura de vértices (2,-2), (2,7), (4, 5), (2,3) en ese orden y luego aplique a esta las siguientes transformaciones lineales precediendo del mismo modo que en el ejercicio anterior.

- a) Expansión por un factor 4 en ambas direcciones.
- b) Reflexión respecto del eje Y.
- c) Rotación en el sentido positivo con centro en el origen y un ángulo de  $60^\circ$  (Tener en cuenta que MATLAB trabaja con ángulos expresados en radianes por lo que  $60^\circ = \pi / 3$  que en el lenguaje de MATLAB se escribe pi /3).

6 - Dibuje una curva cualquiera y aplique la o las transformaciones lineales que más le agraden a fin de experimentar.

### ➤ **Modificación de figuras y cuerpos en el espacio por medio de transformaciones lineales**

Al igual que en el plano, se puede "ver" en el espacio tridimensional, los efectos que produce una determinada transformación lineal sobre una figura o un cuerpo.

Para realizar la gráfica de figuras o cuerpos en el espacio usaremos el comando plot3 que funciona de la siguiente manera:

Dados los vectores  $x=[x_1 \ x_2 \ x_3 \dots x_n]$  ,  $y=[y_1 \ y_2 \ y_3 \dots y_n]$  ,  $z=[z_1 \ z_2 \ z_3 \dots z_n]$  `plot3(x,y,z)` dibuja los puntos  $(x_1,y_1,z_1)$ ,  $(x_2,y_2,z_2)$ ,  $(x_3,y_3,z_3)$ ,...,  $(x_n,y_n,z_n)$  y los une con un segmento de recta. De esto se deduce que el vector  $\underline{x}$  está formado por las primeras componentes de tales puntos, el vector  $\underline{y}$  por las segundas componentes y el vector  $\underline{z}$  por las terceras.

Si se desea aplicar a estas figuras o cuerpos una transformación y luego poder visualizar su efecto se procede en forma análoga a lo realizado en el plano.

### **Ejercicios:**

8 - Dado el triángulo de vértices (2,3,-1), (5,0,-2), (4,-2,0), aplique las siguientes transformaciones lineales de modo que todas puedan verse en una misma figura, diferenciándose entre si por distintos colores o tipos de líneas.

- a) Simetría respecto del plano XY definida por:  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (x,y,-z)$
- b) Simetría respecto del origen de coordenadas definida por

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$$

c) Simetría respecto del eje Z definida por  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (-x,-y,z)$

- 9 - Dada la figura de vértices  $(2,0,0)$ ,  $(1,5,3)$ ,  $(0,-3,4)$  y  $(-6,5,3)$  en ese orden. Halle su imagen respecto de la transformación lineal  $f$  y a la figura resultante aplique la transformación lineal  $g$ . Siendo  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (2x,2y,2z)$  y  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / g(x,y,z) = (x+y,y,x+y+z)$

### Gráfico de cuerpos

Se desea dibujar un tetraedro de vértices  $P = (2,4,0)$ ,  $Q = (-1,6,0)$ ,  $R = (0,2,0)$  y  $S = (0,4,5)$

Se realizará el gráfico de este cuerpo con el comando `plot3`.

Observe los siguientes gráficos y ejecute las instrucciones para poder comprender el modo de confeccionar los vectores  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  y  $\underline{z}$

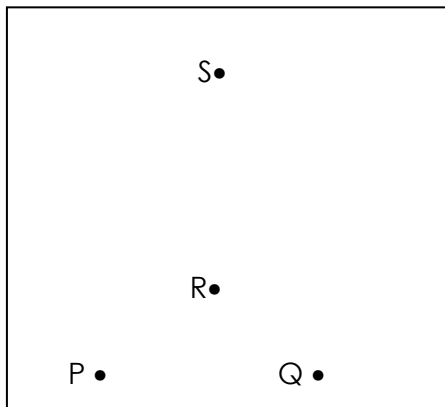


Figura 1

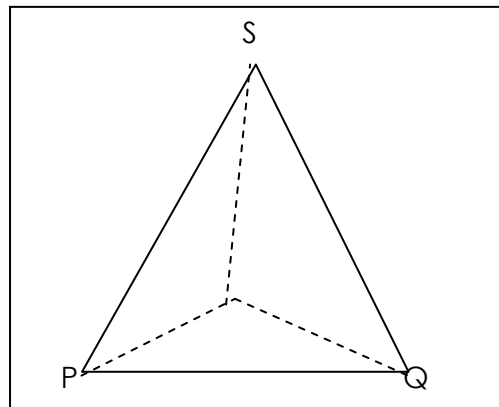


Figura 2

Intente unir los vértices P, Q, R y S de la Figura 1 formando un tetraedro como el de la Figura 2 pero sin levantar el lápiz (se le permite dibujar una línea sobre otra).

Escriba el orden que siguió para unir estos puntos (por ejemplo: P, Q, R, P, S, R, Q, S). Forme los vectores  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  y  $\underline{z}$  con las primeras, segundas y terceras componentes respectivamente de estos puntos en el orden establecido

Los pasos siguientes para realizar la gráfica son ya conocidos.

### Ejercicios:

- 10 - Aplique al tetraedro del ejemplo anterior las siguientes transformaciones lineales de modo que todas se puedan ver en una misma figura.
- Una rotación alrededor del eje Z un ángulo de  $60^\circ$
  - Una rotación alrededor del eje X un ángulo de  $30^\circ$
  - Una rotación alrededor del eje Y un ángulo de  $45^\circ$
- Las matrices asociadas a estas transformaciones lineales se describen en el cuadro siguiente.

Las siguientes son matrices asociadas de algunas transformaciones lineales en el espacio respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotación alrededor del eje X un ángulo  $\theta$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotación alrededor del eje Y un ángulo  $\theta$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotación alrededor del eje Z un ángulo  $\theta$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Expansión por un factor  $k$ , si  $k > 1$

Contracción por un factor  $k$ , si  $0 < k < 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proyección sobre el plano XY

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proyección sobre el plano YZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reflexión respecto del eje X

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexión respecto del plano XZ

## Trabajo Práctico N° 7

### **Valores y vectores propios. Diagonalización. Formas cuadráticas**

Las funciones matriciales que se describen a continuación le serán útiles para resolver los problemas planteados en este Trabajo Práctico:

**eig:**  $\text{eig}(A)$  produce un vector columna cuyos elementos son los valores propios (eigenvalores) de una matriz cuadrada  $A$ .

$[V D]=\text{eig}(A)$  produce una matriz  $V$  cuyas columnas son los vectores propios de  $A$  y una matriz  $D$  diagonal en la cual los elementos de la diagonal son los valores propios de  $A$ .

**poly:** si  $A$  es una matriz cuadrada de orden " $n$ ",  $\text{poly}(A)$  es un vector fila, tal que sus  $n + 1$  elementos son los coeficientes del polinomio característico de  $A$  ordenados en forma decreciente.

1 - Halle los valores propios de las siguientes matrices consideradas sobre el cuerpo de los números reales.

a) 
$$\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

b) 
$$2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

c) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 15 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

d) 
$$2 \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 - Para cada una de las matrices del ejercicio anterior encuentre su polinomio característico y verifique que los valores propios obtenidos son efectivamente las raíces de dicho polinomio.

3 - Verifique la posible validez de las siguientes proposiciones mediante el análisis de ejemplos. En todos los casos  $A$  es una matriz cuadrada.

- a) Si A es una matriz diagonal entonces sus valores propios son los elementos de la diagonal.
- b) 0 es un valor propio de A si y solo si A no es inversible
- c) A y A<sup>t</sup> tienen el mismo polinomio característico.
- d) A es raíz de su polinomio característico. (Teorema de Cayley-Hamilton)

4 - En cada uno de los siguientes casos indique si la matriz A dada es diagonalizable. Si así lo fuera encuentre la matriz C que la diagonaliza y calcule C<sup>-1</sup> A C.

a) 
$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 - Para cada una de las siguientes matrices simétricas, halle una matriz ortogonal que la diagonalice:

A = 
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 12 \\ -5 & 4 & -2 \\ 12 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B = 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 8 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 & 3 \\ 8 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

C = 
$$\begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 4 & -\frac{9}{2} & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

6 - En los siguientes casos:

- i) Realice la gráfica correspondientes a las ecuaciones cuadráticas dadas
- ii) Escriba la ecuación en la forma Av.v = d (donde A es una matriz simétrica ) y elimine el término que contiene a xy rotando los ejes un ángulo θ.
- iii) Escriba la ecuación en términos de las nuevas variables e identifique la cónica que se obtiene.
- iv) Verifique los resultados comparándolos con la gráfica realizada.

a)  $3x^2 - 2xy - 5 = 0$

b)  $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$

c)  $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$

## Bibliografía

- The Math Works, Inc. (1997). *MATLAB, Versión 5, Guía del Usuario*.
- The Math Works, Inc. (1996). *MATLAB, Edición de Estudiante, Versión 4, Guía del Usuario*. (1° Ed).
- Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB* (1° Ed.). Mexico: Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Nakos, G. y Joyber, D. (1999). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: International Thomson Editores
- Poole, David. (2003). *Álgebra Lineal*. México: International Thomson Editores.
- Gerber, H. (1992). *Álgebra Lineal*. México: Grupo Editorial Iberomérica.
- Noble B., Daniel J. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada* (3° Ed.). México: Ed. Prentice – Hall.