METODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Además de los métodos directos, vistos anteriormente para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma AX=B, también se cuenta con métodos iterativos. Describiremos dos métodos iterativos, el de Jacobi y el de Gauss – Seidel. Estos métodos se utilizan en circunstancias especiales. Si la matriz A tiene una gran cantidad de ceros (en cuyo caso A se llama matriz dispersa), los métodos iterativos son a menudo los que dan mejores resultados con un menor esfuerzo. Sin embargo, cada método puede no converger. Después de describirlos se examinaran algunas condiciones en las que los métodos siempre convergen.

En las discusiones que siguen se supondrán que los sistemas son cuadrados y que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo; es decir, se trabajara con sistemas compatibles determinados.

METODO ITERATIVO DE JACOBI

Sea el sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1º PASO – Suponiendo que los elementos a_{ij} son no nulos para todo i = j, i = 1,2,3; se reescribe el sistema de ecuaciones lineales (1) de ,modo tal que en la i-esima ecuación aparezca la incógnita x_i despejada en función de las restantes

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{cases} \qquad (2)$$

2º PASO – Tomando de manera arbitraria una aproximación inicial en la solución del sistema obtendremos:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(o)}, x_3^{(0)}$$

NOTA: En caso de carecer de información, puede tomarse como primera aproximación la siguiente:

$$x_1^{(0)} = 0 \ \ , x_2^{(o)} = 0 \ \ , x_3^{(0)} = 0$$

3º PASO – Estos valores iníciales se sustituyen en el lado derecho de las ecuaciones (2) con el fin de obtener la nueva aproximación

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}}{a_{22}} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}}{a_{33}} \end{cases}$$

4º PASO – Los valores obtenidos en el 3º paso se sustituyen en el lado derecho de las ecuaciones (2), obteniendo así una nueva aproximación:

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)}}{a_{22}} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}}{a_{33}} \end{cases}$$

Se continúa este proceso hasta una iteración k, obteniendo así una nueva aproximación

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)}}{a_{22}} \\ x_3^{(k)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)}}{a_{33}} \end{cases}$$

Obteniendo de esta forma una sucesión $\left\{x_1^{(k)}\right\}$, $\left\{x_2^{(k)}\right\}$, $\left\{x_3^{(k)}\right\}$, las cuales en caso de converger lo hacen a un valor numérico que es la solución del sistema de ecuaciones lineales (1)

NOTAS:

- Las sucesiones obtenidas, pueden no converger, es decir ser divergentes.
- El proceso se detiene cuando se alcanza la precisión deseada. Por lo general, esto ocurre cuando se obtienen los mismos valores con la precisión indicada en dos iteraciones consecutivas.
- En algunos problemas, las iteraciones de Jacobi convergen aunque lo hacen con cierta lentitud. La rapidez de convergencia se puede mejorar con el METODO DE GAUSS - SEIDEL.

EJEMPLO 1:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3.8x & + & 1.6y & + & 0.9z & = & 15.5 \\ -0.7x & + & 5.4y & + & 1.6z & = & 10.3 \\ 1.5x & + & 1.1y & - & 3.2z & = & 3.5 \end{cases}$$

1º Paso - Se reescribe el sistema de ecuaciones de modo tal aparezca la incógnita x_i despejada en función de las restantes

$$x = \frac{15.5}{3.8} \qquad - \frac{1.6}{3.8}y - \frac{0.9}{3.8}z$$

$$y = \frac{10.3}{5.4} + \frac{0.7}{5.4}x \qquad - \frac{1.6}{5.4}z$$

$$z = -\frac{3.5}{3.2} + \frac{1.5}{3.2}x + \frac{1.1}{3.2}y$$

2º Paso- Se escoge de manera arbitraria una aproximación inicial de la solución del sistema:

$$x^{(0)} = 0 \ , y^{(0)} = 0, \ \ z^{(0)} = 0$$

3º Paso- A continuación usando la solución anterior obtendremos la nueva aproximación $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, es decir:

$$x^{(1)} = \frac{15.5}{3.8} \qquad - 0 - 0$$ Luego $x^{(1)} = 4.0789$

$y^{(1)} = \frac{10.3}{5.4} + 0 - 0$ Luego $y^{(1)} = 1.9074$

$z^{(1)} = -\frac{3.5}{3.2} + 0 + 0$ Luego $z^{(1)} = -1.0938$

4º Paso- Se usan los valores obtenidos en el paso anterior calculamos laa nueva aproximación $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$.

$X^{(2)} = \frac{15.5}{3.8} - \frac{1.6}{3.8}1.9074 - \frac{0.9}{3.8}(-1.0938)$ Luego $x^{(2)} = 3.5349$

$y^{(2)} = \frac{10.3}{5.4} + \frac{0.7}{5.4}4.0789 - \frac{1.6}{5.4}(-1.0938)$ Luego $y^{(2)} = 2.7602$

$z^{(2)} = -\frac{3.5}{3.2} + \frac{1.5}{3.2}4.0789 + \frac{1.1}{3.2}1.9074$ Luego $z^{(2)} = 1.4739$

Procediendo de esta manera se obtienen las sucesiones $\{x^n\}$, $\{y^n\}$, $\{z^n\}$, cuyos primeros 15 primeros términos que vienen dados por la siguiente tabla

Iteración	x^n	y^n	z^n
0	0	0	0
1	4.0789	1.9074	-1.0938
2	3.5349	2.7602	1.4739
3	2.5677	1.9289	1.5121
4	2.9087	1.7922	0.7729
5	3.1413	2.0554	0.8858
6	3.0037	2.0522	1.0853
7	2.9578	1.9752	1.0197
8	3.0058	1.9887	0.9717

9	3.0115	2.0091	0.9988
10	2.9964	2.0018	1.0085
11	2.9972	1.9970	0.9990
12	3.0015	1.9999	0.9977
13	3.0006	2.0009	1.0007
14	2.9995	1.9999	1.0006
15	2.9999	1.9998	0.9997

Se puede observar en la tabla que $\{x^n\}, \{y^n\}, \{z^n\}$, convergen hacia los valores x= 3, y= 2, z= 1 que son la solución del sistema.

__METODO ITERATIVO DE GAUSS – SEIDEL__

Este Método introduce una cierta información en el método de Jacobi, consiste en sustituir en la ecuación posterior los valores que ya se han calculado en dicha etapa para sus variables anteriores.

Sea el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

<u>1º PASO</u> - Ase trabaja de la misma forma que el método iterativo de Jacobi hasta llegar a la ecuación

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{cases} \qquad (2)$$

<u>2º PASO</u> – Tomando de manera arbitraria una aproximación inicial en la solución del sistema:

$$x_1^{(0)} = 0 \quad , x_2^{(o)} = 0 \quad , x_3^{(0)} = 0$$

Obtendremos así $x_1^{(1)}$; es decir

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}}{a_{11}} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

A continuación para obtener $x_2^{(1)}$, se sustituye en la segunda ecuación del sistema (2) $x_1^{(1)}$ y $x_3^{(0)}$; obteniendo:

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}}{a_{22}} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)}}{a_{22}}$$

Para encontrar $x_3^{(1)}$ se sustituye en la tercera ecuación del sistema (2) $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$; obteniendo:

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}}{a_{33}}$$

<u>3º PASO</u> – Procediendo de la misma forma, haciendo uso siempre de las operaciones mas recientes, se llega a una solución de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}}{a_{33}} \end{cases}$$

Obteniendo nuevamente, una sucesión $\left\{x_1^{(k+1)}\right\}$, $\left\{x_2^{(k+1)}\right\}$, $\left\{x_3^{(k+1)}\right\}$ que en caso de converger lo hacen a un valor numérico que es la solución del sistema de ecuaciones lineales (1).

<u>NOTA:</u>

- Se puede observar que Gauss – Seidel es más eficiente que el método de Jacobi.

<u>EJEMPLO 2:</u>

Trabajaremos con el sistema de ecuaciones lineales de ejemplo 1.

1º Paso- Se procede de la misma manera que en el método de Jacobi, obteniendo:

$$x = \frac{15.5}{3.8} - \frac{1.6}{3.8}y - \frac{0.9}{3.8}z$$

$$y = \frac{10.3}{5.4} + \frac{0.7}{5.4}x - \frac{1.6}{5.4}z$$

$$z = -\frac{3.5}{3.2} + \frac{1.5}{3.2}x + \frac{1.1}{3.2}y$$

2º Paso- Se elige como una primera aproximación $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$, $z^{(0)} = 0$, con ellas obtendremos $x^{(1)}$.

$$x^{(1)} = \frac{15.5}{3.8} - 0 - 0$$ Luego $x^{(1)} = 4.0789$

Para obtener $y^{(1)}$, se sustituye por $x^{(1)}$, $z^{(0)}$, obteniendo

$$y^{(1)} = \frac{10.3}{5.4} + \frac{0.7}{5.4}4.0789 - \frac{1.6}{5.4}0$$ Luego $y^{(1)}=2.4362$

Para calcular $z^{(1)}$, se utilizan las aproximaciones $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, obteniendo

$$z^{(1)} = -\frac{3.5}{3.2} + \frac{1.5}{3.2}4.0789 + \frac{1.1}{3.2}2.4362$$ Luego $z^{(1)}= 1.6557$

Utilizando siempre las aproximaciones más recientes, se puede obtener la siguiente tabla

Iteración	x^n	y^n	z^n
0	0	0	0
1	4.0789	2.4362	1.6557
2	2.6611	1.7618	0.7592
3	3.1573	2.0917	1.1053
4	2.9364	1.9606	0.9567
5	3.0269	2.0163	1.0182
6	2.9888	1.9932	0.9924
7	3.0047	2.0029	1.0032
8	2.9980	1.9988	0.9987
9	3.0008	2.0005	1.0006

10	2.9997	1.9998	0.9998
11	3.0001	2.0001	1.0001

Nuevamente observamos en la tabla que $\{x^n\}$, $\{y^n\}$, $\{z^n\}$, convergen hacia los valores x= 3, y= 2, z= 1 que son la solución del sistema, se puede observar que se obtuvo la solución en menos iteraciones que con el método de Jacobi.

<u>TEOREMA:</u>

Este teorema nos proporciona una condición suficiente para la convergencia de los dos métodos iterativos.

<u>TEOREMA:</u> Si la diagonal de la matriz A es estrictamente dominante, entonces las iteraciones de Jacobi y de Gauss – Seidel convergen a la solución única del sistema AX = B.

<u>Métodos iterativos para calcular los valores propios de matrices:</u>

<u>Método de las potencias.</u>

En el cálculo de los valores propios de matrices, en muchas ocasiones resulta difícil calcular las raíces del polinomio característico. Por tal motivo se han desarrollado métodos iterativos para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz. Desarrollaremos el método de la potencia, el cual nos permite aproximar los valores característicos de una matriz.

Para ello supondremos que la matriz A de orden n tiene n valores característicos y un conjunto asociado de n vectores propios característicos.

Se utilizara en este método las siguientes consideraciones:

- $w^k = A^{(k-1)}w$ (1)
- $\beta_j^{(k+1)} = \dfrac{(Aw^k)_j}{(w^k)_j} \approx \lambda_1.$ (2)
- $|\lambda_j| > |\lambda_i|$ i

<u>1º PASO</u> – Se supondrá como una primera aproximación al vector propio w^0 = (1,1).

<u>2º PASO</u> – Utilizando (1) encontraremos $w^1 = Aw^0$, luego las componentes de w^1 se dividen por las componentes de w^0, obteniendo de esta forma la primera aproximación a los valores propios de la matriz A.

3º PASO –Nuevamente utilizando (1) procederemos a encontrar w^2; de la siguiente manera: $w^2 = Aw^1$; luego dividiremos las componentes de w^2 por cada componente de w^1 obteniéndose la segunda aproximación a los valores propios de A.

Se continua este procedimiento hasta observar que la sucesión de $\{\beta_j\}$ convergen a un valor; el cual será el valor propio dominante de la matriz A y el vector correspondiente w^j es el vector propio asociado al valor propio encontrado.

EJEMPLO

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ Calcular su valor propio dominante y un vector propio asociado

Suponiendo que w^0 = (1,1); construiremos la siguiente tabla:

Iteración	w^k	β_1	β_2
0	(1,1)	-	-
1	(3,-9)	3	-9
2	(-15,33)	-5	-3,6667
3	(51,-105)	-3.4	-3.1818
4	(-159,321)	-3.1176	-3.0571
5	(483,-969)	-3.0377	-3.0187
6	(-1455,2913)	-3.0124	-3.0062
7	(4371,-8745)	-3.0041	-3.0021
8	(-13119,26241)	-3.0014	-3.0007
9	(39363,-78729)	-3.0005	-3.0002
10	(-118095,236193)	-3.0002	-30001

Se observa en la tabla que β_1 y β_2 tienden al valor -3, que puede comprobarse que es el valor propio dominante. El vector w^{10} es aproximadamente el vector propio de A asociado a dicho valor propio. Es posible simplificar este vector multiplicándolo por el reciproco de su componente de mayor valor absoluto.

$$w^{10} = \frac{1}{236193}(-118095, 236193) = (-0.49999, 1) \approx (-\frac{1}{2}, 1)$$