Álgebra Lineal (Ing.)

GUÍA N° 1:

Matrices. Matrices Especiales. Operaciones matriciales

1.- Una cátedra está organizando sus datos correspondientes a las comisiones para el dictado de las clases prácticas. Tiene interés en la distribución de estudiantes por comisión y sexo. En la comisión I se inscribieron 60 varones y 45 mujeres, en la II se inscribieron 55 varones y 45 mujeres y en la comisión III 57 varones y 40 mujeres. Ordenar estos datos en una matriz.

2.- Una empresa dispone de tres sucursales, una en Santiago del Estero otra en Tucumán y una tercera en Salta. Cada una de ellas vende cemento portland de los siguientes tipos: normal (cpn), compuesto (cpc) y de alta resistencia inicial (cpARI)
Las cantidades de bolsa de cemento por sucursal se representan en la siguiente tabla:

Tipo de cemento \ Sucursal	SDE	T	S
cpn	400	350	100
cpc	200	450	300
cpARI	100	400	200

a. ¿Qué sucursal dispone de mayor stock de cemento portland normal?

b. ¿Qué representa el elemento a_{32}? ¿y el a_{23}? Notar la importancia del orden de los subíndices.

c. ¿En qué sucursal y de qué tipo de cemento crees que convendría lanzar una oferta para eliminar un posible exceso de existencia?

3.- Escribir explícitamente las matrices definidas por:

a. $A \in \mathbb{R}^{3\times3}/a_{i,j} = 2i - j \quad \forall i,j = 1,2,3$

b. $B \in \mathbb{R}^{2\times4}/b_{i,j} = 1 \ \ si \ \ i = j \ \wedge \ b_{i,j} = i - 2j \ \ si \ \ i \neq j$

c. $C \in \mathbb{R}^{3\times2}/c_{i,j} = 0 \ \ si \ \ i \leq j \ \wedge \ c_{i,j} = i.j \ \ si \ \ i > j$

4.- Determinar los valores de $x, \ y, z$ de modo que se verifiquen las siguientes igualdades:

a. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & y-z \\ x+y & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & x-z & 3 \\ 6 & 2y+z & -1 \\ 1 & x+y & z \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & -1 \\ \frac{1}{2} & 2x-z \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5.- Escribir un ejemplo, en el caso de que sea posible, de una matriz de orden 3 que cumpla las siguientes condiciones:

a. Triangular superior
b. Simétrica, diagonal, no escalar
c. Triangular inferior, no diagonal
d. Escalar, no diagonal
e. Simétrica y escalar
f. Antisimétrica

6.- Dadas las siguientes matrices reconocer a qué matriz especial corresponde cada una de ellas.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 2 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$

7.- Dadas las siguientes matrices, determinar los valores de a, b, c y d de modo que se verifiquen las condiciones indicadas.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & \boldsymbol{a}+3 & -1 \\ 4 & -2 & 4\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{b}-1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ es simétrica

b. $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \boldsymbol{c}-3 \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{d} & 0 & 5 \\ 4 & \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ es antisimétrica

c. $C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}-1 & 0 \\ b & 3 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}-2 & \boldsymbol{d}+9 \end{bmatrix}$ es escalar

8.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular (o responder "no está definida")

a. $A + B$
b. $2B + G$
c. $B - 4C$
d. $\frac{1}{3}C - H$
e. $-2(G + 2B)$
f. $E(\frac{1}{3}C)$
g. EF
h. GC
i. $A(2B)$
j. DE
k. CG

9.- Hallar los números reales x, y, z, u y v para los que se verifica:

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 0 & y \\ z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3v \\ 3u & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10.- Calcular los siguientes productos:

i) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 2 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} i & 1+2i \\ 2 & 3i \end{bmatrix}^2$

11.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Encontrar la matriz X tal que $C^t + 2X = BA$

b. Sean las matrices $D = B - AC$ y $E = A^tB + C$. Obtener únicamente:

b1) La primera columna de D.

b2) El elemento d_{13} de la matriz D.

b3) La segunda fila de la matriz E.

b4) El elemento e_{23} de la matriz E.

12.- Escribir los algoritmos (secuencia de pasos) que permitan obtener b1), b2), b3) y b4).

13.- Sea A una matriz cualquiera. ¿Bajo qué condiciones el producto AA^t está definido?

14.- Sea A $= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ Hallar:

a. $2AA^t$ b. $2A^tA$

15.- Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ 4 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar a y b para que: $(A+B)C^t = 0$

Problemas de aplicación

Resolver las siguientes situaciones usando Matlab.

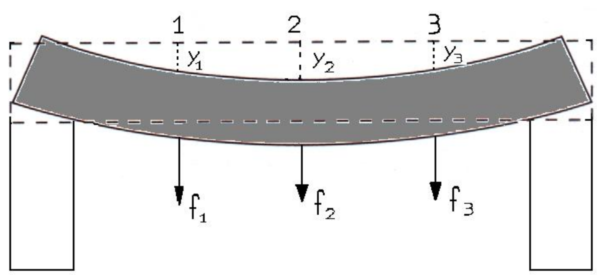
16.- Considerar las sucursales del problema 2. Suponga que la empresa realiza una nueva entrega de cemento portland según la matriz *E*. Hallar las existencias actualizadas.

$$E = \begin{bmatrix} 60 & 40 & 70 \\ 40 & 50 & 20 \\ 20 & 10 & 60 \end{bmatrix}$$

17.- Una viga elástica horizontal tiene soportes en cada extremo y está sometida a fuerzas en los puntos 1, 2, 3, como lo muestra la figura. Sea **f** un vector de R^3 tal que enumera las fuerzas en estos puntos y sea **y** también un vector de R^3 tal que enumere las magnitudes de la flexión (esto es, movimiento) de la viga en los tres puntos. Usando la ley de Hooke de la física, se puede demostrar que

y=Df

Siendo **D** una matriz de flexibilidad donde cada columna enumera las flexiones debidas a una fuerza en cada uno de los puntos.



Sea $$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0.002 & 0.004 & 0.002 \\ 0.001 & 0.002 & 0.005 \end{bmatrix}$$

la matriz de flexibilidad, con la flexibilidad medida en pulgadas por libra. Suponer que se aplican fuerzas de 20, 40 y 10 libras en los puntos 1, 2 y 3 de la figura, respectivamente. Encontrar las flexiones correspondientes.

18.- Las distancias aproximadas por rutas nacionales entre las ciudades de Santiago del Estero, San Miguel de Tucumán y Córdoba están dadas por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Sgo.del E.} & \text{Tuc.} & \text{Cba.} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Sgo. del E.} \\ \text{Tuc.} \\ \text{Cba.} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 159 & 439 \\ 159 & 0 & 587 \\ 439 & 587 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si se desea trazar un mapa cuya escala sea tal que 1 cm en el papel represente 20 km de distancia real ¿Cuál es la matriz de distancias del mapa?

19.- Una empresa quiere producir acero, para ello son necesarias algunas materias primas como: mineral hierro y carbón duro. La siguiente tabla nos muestra las demandas (en toneladas) de mineral hierro y carbón duro en un periodo de 3 semanas:

	mineral hierro	**carbón duro**
1ª semana	9t	8t
2ª semana	5t	7t
3ª semana	6t	4t

Existen tres proveedores diferentes P_1, P_2, P_3 que ofrecen estas materias primas. En la siguiente tabla se muestran los costos por tonelada de materia prima para cada proveedor:

	P_1	**P_2**	**P_3**
mineral hierro	540	630	530
carbón duro	420	410	440

¿Cuál es el proveedor que ofrece mayor beneficio?

20.- María contabiliza las horas semanales que dedica a: "clase", "estudio y lectura", "televisión" y "salida con amigos"; del siguiente modo:

	Clase	Estudio	T.V	Salidas
Lunes	6	2	1	2
Martes	5	3	2	1
Miércoles	8	1	0	2
Jueves	6	1	2	1
Viernes	5	4	0	4
Sábado	1	2	3	6
Domingo	0	2	4	6

Valorando cada hora dedicada a las distintas tareas del siguiente modo:

	Puntos
Clase	2
Estudio	3
T.V	1
Salidas	4

Su tía Filomena hace una valoración distinta:

	Puntos
Clase	4
Estudio	4
T.V	0
Salidas	2

a. Llamar H a la matriz que representa las horas que dedica María a las diferentes actividades.
b. Escribir una matriz V que contenga las dos valoraciones dispuestas en columnas. Calcular el producto A =HV y expresar el significado del elemento a_{52}.
c. ¿Cuál es el día cuyas actividades, en conjunto, valora más María? ¿Y cuál valora más su tía?

21.- Cálculo tensorial

Un tensor de segundo orden, en tres dimensiones.

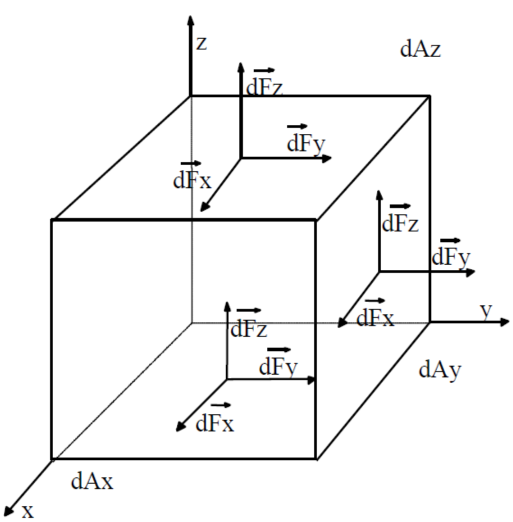
En matemáticas y en física, un **tensor** es cierta clase de entidad algebraica de varias componentes, que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido. En adelante utilizaremos el convenio de suma de Einstein.

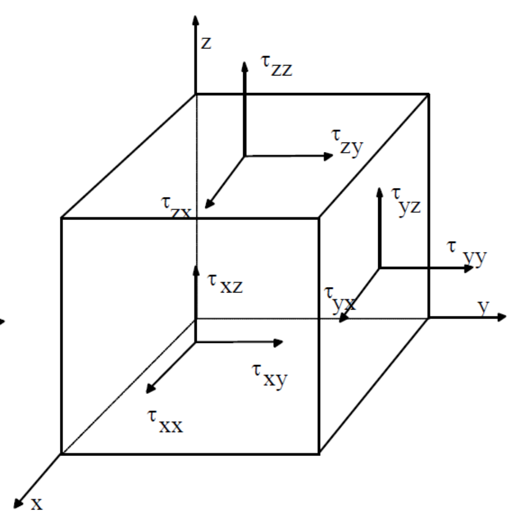
Fuerzas de superficie en un fluido

Las fuerzas superficiales que actúan sobre un cuerpo, es decir, sobre la superficie del mismo, dependen de la posición, del tiempo y de la orientación del elemento de superficie sobre la cual actúan, es decir, del vector normal a dicho elemento de superficie.

Si se considera un punto fijo de un campo fluido, en un instante dado, pasará por ese punto una partícula fluida. En ese punto e instante de tiempo, una normal a la superficie de dicha partícula para otro instante de tiempo en este mismo punto, o para cualquier otro punto del campo fluido la normal puede ser distinta. Las fuerzas superficiales dependen por tanto, en general, además de la posición y del tiempo, de la orientación del elemento de superficie.

Las fuerzas superficiales unitarias actuarán sobre el área "dA", que a su vez viene representada por un vector unitario normal. Representando las proyecciones según el sistema de ejes "X,Y,Z" del elemento "dS" y las componentes de las fuerzas superficiales según las tres direcciones, se pueden definir los esfuerzos unitarios para cada superficie proyectada





Sobre el elemento de superficie “dA_x” los esfuerzos son:

$$\tau_{xx} = \frac{dF_x}{dA_x} \qquad \tau_{xy} = \frac{dF_y}{dA_x} \qquad \tau_{xz} = \frac{dF_z}{dA_x}$$

sobre el elemento de superficie “dA_y”:

$$\tau_{yx} = \frac{dF_x}{dA_y} \qquad \tau_{yy} = \frac{dF_y}{dA_y} \qquad \tau_{yz} = \frac{dF_z}{dA_y}$$

Y sobre el elemento de superficie “dA_z” los esfuerzos son:

$$\tau_{zx} = \frac{dF_x}{dA_z} \qquad \tau_{zy} = \frac{dF_y}{dA_z} \qquad \tau_{zz} = \frac{dF_z}{dA_z}.$$

Se puede expresar matricialmente de la forma

$$\begin{bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \\ f_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

En forma compacta: $\vec{f_s} = \tau\, \vec{n}$

a. Resolver el sistema de fuerzas $\vec{f_s}$ actuantes debido al tensor $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector principal $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. Proponer un nuevo tensor y un nuevo vector principal $\vec{n}$ y realice el cálculo del nuevo $\vec{f'_s}$ (la única condición que se debe respetar es que la diagonal principal de τ esté formada por unos).

Determinantes – Aplicaciones- Matrices inversibles

23.- Calcular los siguientes determinantes de orden 2

a) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1-i & -1 \\ -1+i & i \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}$

24.- Calcular los siguientes determinantes mediante su desarrollo por la primera fila.
(Si es necesario reiterar el procedimiento).

a. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & -7 \\ -6 & 1 & -1 & 9 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

25.- Calcular los determinantes usando sus propiedades y efectuando un número reducido de operaciones.

a. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ -4 & -5 & -3 & -7 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

26.- Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y $D(A) = -2$. Hallar el valor de los siguientes determinantes empleando propiedades. En cada caso, indicar las propiedades empleadas.

a. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2e+b & 2d+a & 2f+c \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-4a & e-4b & f-4c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

27.- Escribir los algoritmos (secuencia de pasos) que le permitan, en cada caso, hallar el valor de los determinantes del ejercicio 26.

28.- Sea A una matriz triangular (superior o inferior)

a. Mostrar que su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal.
b. Señalar una condición necesaria y suficiente sobre A para que D(A) sea no nulo.

29.- Hallar el valor de t de modo que se verifique que:

$$\begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & t-1 \end{bmatrix} = -2$$

30.- Dada la matriz A:

a. Calcular el $D(A)$.

b. Hallar la $Adj\ A$.

c. Determinar, si existe, la inversa de A usando la matriz adjunta.

i) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **ii)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ **iii)** $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **iv)** $A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ -1 & -i & -i \end{bmatrix}$

31.- Hallar la matriz X, si es posible, empleando matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

32.- Determinar el o los valores de m para los cuales la matriz A es inversible:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ m & 3 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Problemas de aplicación

33.- El área del paralelogramo de lados $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ puede obtenerse mediante el cálculo del siguiente determinante: área $= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

a. Calcular el área del paralelogramo de lados $u = (4, 2)$ y $v = (-2, 5)$.

b. Determinar el área del triángulo de vértices A = (-1, -1), B = (1, 5), C = (5, 0)

c. Hallar el área de la figura de vértices A, B, C, D, E y F en ese orden, siendo: A = (2,0); B= (0,1); C = (3,5); D = (4,5); E = (8,6) y F = (9,0)

d. Escribir el algoritmo (secuencia de pasos) que le permita hallar el área de la figura del ítem c.

34.- El volumen de un paralelepípedo de aristas $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ puede calcularse mediante el siguiente determinante:

$$volumen = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

a. Determinar el volumen del paralelepípedo de lados *u*=(1,-2,1), *v*=(0,2,3), *w*=(-2,1,1)

b. Demostrar que $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ es la ecuación de una recta de $\mathbb{R}^2$ que contiene a los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$.

c. Si $P_0=(x_0, y_0)$ no pertenece a la recta que contiene a P_1 y P_2, ¿qué ocurre con el siguiente determinante?

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinar la ecuación de la recta que contiene a $P_1 = (-1, 6)$ y a $P_2 = (0, 5)$ usando el resultado anterior.