ÁLGEBRA LINEAL
(2016)
GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS Nº 2

Operaciones elementales de filas. Matriz escalón reducida. Cálculo de la Inversa.

1- Indique con R las matrices escalón reducida por filas y con E las matrices escalón por filas:

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ vii) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2- Obtenga la matriz escalón reducida por filas de cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ vii) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ a & 2 & 3a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$

3- ¿Cuál es el rango de cada una de las matrices del ejercicio 2?

4- Determine la inversa de las siguientes matrices mediante reducción por filas de A e I_3.

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5- Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, expréselos en la forma matricial A X = B. Determine la compatibilidad o incompatibilidad de cada uno de ellos, usando el teorema de Rouché-Frobenius y el corolario.

i) $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + 2y + z = 0 \\ -y + z = 3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} -x + 2y + w = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + y + w = -2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} -x + 2z = -1 \\ y = 1 \\ -2z + w = 3 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} x - 2y - z + w = 2 \\ -y + 3z = 1 \end{cases}$ v) $\begin{cases} -x - y = -2 \\ y - z = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

6- Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. Los tres primeros por eliminación gaussiana y los restantes por Gauss-Jordan. Analice los rangos para establecer la compatibilidad o no del sistema.

i) $\begin{cases} -2x + y \quad = 1 \\ x - y + z = -2 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x \qquad - z = 3 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ -2x \qquad z = 4 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -x + y + z = 1 \\ -x - y - z = 3 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} x - 2y + 2z + 3w = 3 \\ 2x \qquad + z + w = 1 \\ x - y + 2z \qquad = 2 \end{cases}$ v) $\begin{cases} x - y + iz = 1 \\ iy - z = i \end{cases}$ vi) $\begin{cases} x - iy \qquad = 2 \\ y + iz = 1 + 2i \\ x + y \qquad = 1 + i \end{cases}$

vii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$

7- Si $\overline{X}$ es una solución del sistema de ecuaciones lineales compatible AX = B, determine B y formule el sistema, donde:

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $\bar{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una solución.

ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una solución.

8- Sea A la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Determine el o los valores de m para que el sistema:

a) no tenga solución
b) tenga solución única
c) tenga más de una solución

i) $A = \begin{bmatrix} -m & 2 & 0 & m \\ 2 & 1 & 2m & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2m & 0 & m \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & m & 0 \end{bmatrix}$

9- Dados los siguientes sistemas cuadrados compatibles determinados, resuelva empleando el Teorema de Cramer.

i) $\begin{cases} 2x + y \quad = -2 \\ -4x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1 \\ -x + z = -1 \end{cases}$

10- Dados los siguientes sistemas cuadrados compatibles, establezca si son determinados usando el teorema de Cramer, y en dicho caso halle la solución empleando la regla.

i) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 3 \\ -x + y + z = -4 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 2x - y + z - 2w = -5 \\ 2x + 2y - 3z + w = -1 \\ -x + y - z \qquad = -1 \\ 4x - 3y + 2z - 3w = -8 \end{cases}$

11- Resuelva, con el método que más le convenga, los siguientes sistemas homogéneos A X = O, donde A es:

i) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & .1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ vii) $\begin{bmatrix} 1+i & -i & 2 \\ -i & i & -1 \end{bmatrix}$

12- Determine el o los valores de k para los cuales el siguiente sistema tiene soluciones distintas a la trivial.

i) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ ky+z=0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} kx-y+z=0 \\ x+2y+kz=0 \\ -x+y-kz=0 \end{cases}$

13- Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a.- Usando el método de Jacobi, Calcule los resultados con cuatro cifras decimales

b.- Usando el método de Gauss-Seidel

c.- Determine una aproximación del error cometido en cada sistema.

13.1- $\begin{cases} 4.4x - 2.3y + 0.7z = 7.43 \\ 0.8x + 2.52y + 1.1z = 12.17 \\ -1.6x + 0.4y - 5.2z = 26.12 \end{cases}$

13.2- $\begin{cases} 3.3x - 1.2y + 2z = 7.67 \\ 2.4x + 5.1y - 1.3z = 9.95 \\ x - 4.6y + 6.3z = 11.94 \end{cases}$

13.3- $\begin{cases} 31x + 2.2y + 9z = 82.33 \\ 22x + 40y + 2z = 1112.63 \\ 9x + 2y + 31z = -113.03 \end{cases}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales – Problemas de Aplicación

En los casos que crea conveniente utilice Matlab para resolver las situaciones problemáticas que a continuación se presentan:

14- Muchos problemas que plantea la geometría analítica pueden ser resueltos mediante los sistemas de ecuaciones lineales. Para resolver las siguientes situaciones deberá repasar las ecuaciones cartesianas de rectas, planos y cónicas.

14.1- Determine la ecuación general cartesiana de la recta de $\mathbb{R}^2$que contiene a los puntos P = (-2,1) Q = (-6,-2)

14.2-Determine la ecuación cartesiana del plano que contiene a los puntos

P = (1,0,-3), Q = (-2,3,0) y R = (1,2,-1)

14.3- Halle la ecuación de la cónica cuya gráfica pasa por los cinco puntos dados e indique de que cónica se trata.

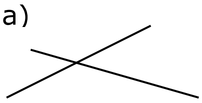
(2, 0), (4, -3), (0, -3), (2, -6), (1, $\frac{3\sqrt{3}-6}{2}$)

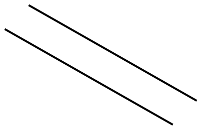
14.4- Determine la intersección de las rectas de ecuaciones:

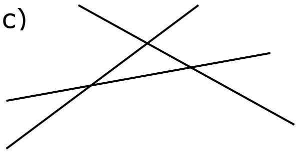
$2x - y = 8$ y $-x - 4y = 5$

Proponga un sistema en el que aparezcan ecuaciones de rectas paralelas a las anteriores, pero cuyo punto de intersección sea (4,-2).

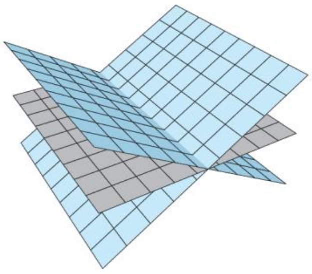
14.5- Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente cada una de las siguientes situaciones:

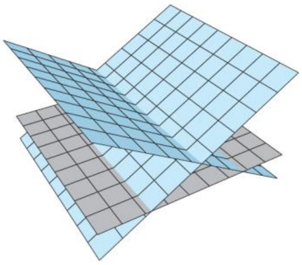
a)


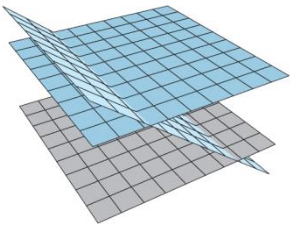
b)


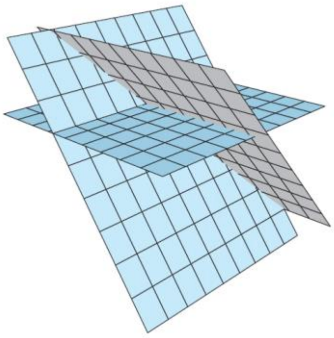
c)


14.6- Escriba un sistema de ecuaciones lineales que represente que represente cada una de las siguientes situaciones:

a)


b)


c)


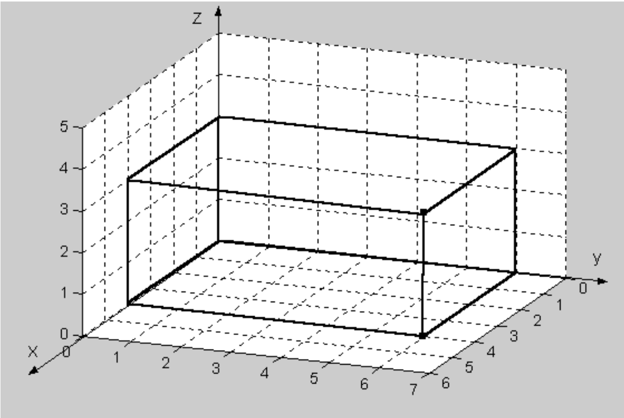
d)


14.7- De la geometría elemental se sabe que hay una sola línea recta que pasa a través de dos puntos cualesquiera en un plano. Menos conocido es el hecho de que existe una parábola única a través de cualesquiera tres puntos no colineales en un plano. Para cada de los siguientes conjuntos de puntos, encuentre una parábola con una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que pase a través de los puntos dados. (Grafique la parábola resultante para comprobar la validez de su respuesta.)

- (0, 1), (-1, 4) y (2, 1)
- (-3, 1), (-2, 2) y (-1, 5)

14.8- Sea el punto $P = (1, 2,3)$ y los vectores de dirección $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ y $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$. Describa todos los puntos $Q = (a, b, c)$ tales que las rectas que los contienen, con vector dirección $\mathbf{v}$, intersecten a la recta de ecuación $X = P + t\mathbf{u}$

14.9- Las caras de un paralelepípedo son porciones de planos en $\mathbb{R}^3$. Cada uno estos planos queda representado por una ecuación lineal con tres incógnitas. Según esto, para el paralelepípedo de la figura siguiente:



a) Proponga un sistemas de ecuaciones lineales que represente a los planos que contienen a:
   - a1- las bases
   - a2- la cara anterior y la cara lateral derecha.
   - a3- las dos bases y la cara lateral izquierda.
   - a4- la base superior, la cara posterior y la cara lateral derecha.

b) Determine el conjunto solución de los sistemas del apartado a).
   ¿de qué tipo es el sistema que representa a todas las caras del paralelepípedo?

15- Un cafetalero vende tres mezclas de café. Una bolsa de la mezcla de la casa contiene 300 gramos de grano colombiano y 200 gramos de grano rostizado francés. Una bolsa de la mezcla especial contiene 200 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano keniano y 100 gramos de grano rostizado francés. Una bolsa de mezcla gourmet contiene 100 gramos de grano colombiano, 200 gramos de grano keniano y 200 gramos de grano rostizado francés. El comerciante tiene a la mano 30 kilogramos de grano colombiano, 15 kilogramos de grano keniano y 25 kilogramos de grano rostizado francés. Si quiere usar todos los granos, ¿cuántas bolsas de cada tipo de mezcla puede elaborar?

16- Una florista ofrece tres tamaños de arreglos florales que contienen rosas, margaritas y crisantemos. Cada arreglo pequeño contiene una rosa, tres margaritas y tres crisantemos. Cada arreglo mediano contiene dos rosas, cuatro margaritas y seis crisantemos. Cada arreglo grande contiene cuatro rosas, ocho margaritas y seis crisantemos. Un día, la florista nota que usó un total de 24 rosas, 50 margaritas y 48 crisantemos para surtir pedidos de estos tres tipos de arreglos. ¿Cuántos arreglos de cada tipo elaboró?

17- Una compañía de artículos deportivos quiere fabricar un nuevo tipo de zapato deportivo, poco costoso, e investiga el mercado de la demanda. Encuentra que si un par de zapatos nuevos cuesta \$20 en un área de ingreso familiar promedio de \$ 20000 y que si su competidor, Tríceps Inc. vende cada par de zapato a \$20, vendería 660 pares. Por otro lado si el precio fuera igual y Tríceps bajara su precio a $10 el par entonces vendería 110 pares en un área de $ 30000 de ingreso. Por último, si el precio de los zapatos fuera de $15 el par y la competencia se queda en $ 20 el par, se vendería 1010 pares en un área de $25000 de ingreso. Determinar la función demanda suponiendo que depende linealmente de sus variables.Parte del propulsante empleado en una etapa de las misiones

18- Parte del propulsante empleado en una etapa de las misiones Apolo a la Luna fue un óxido de nitrógeno, el tetróxido de dinitrógeno (N_2O_4). Uno de los combustibles utilizados en ese propulsante fue la hidracina (N_2H_4). La combustión produjo principalmente nitrógeno y agua.

Realice el balanceo de la ecuación química de ese proceso.

$$N_2H_4 + N_2O_4 \rightarrow N_2 + H_2O$$

Para tal fin use sistemas de ecuaciones lineales. Debe encontrar enteros no negativos **a**, **b**, **c** y **d** tales que el número de átomos de cada uno de los elementos del primer miembro de la siguiente ecuación sea igual al número de átomos del segundo miembro.

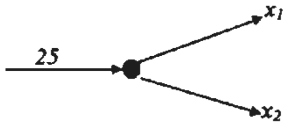
$$a\, N_2H_4 + b\, N_2O_4 \rightarrow c\, N_2 + d\, H_2O$$

19- Realice El balanceo de las siguientes ecuaciones químicas usando el proceso del ejercicio anterior:

a) $CO_2 + H_2OC_6 \rightarrow H_{12}O_6 + O_2$ (Esta reacción tiene lugar cuando una planta verde convierte dióxido de carbono y agua en glucosa y oxigeno durante la fotosíntesis)
b) $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$ (Esta reacción ocurre cuando butano, C_4H_{10} , se quema en presencia de oxígeno para formar dióxido de carbono y agua.)
c) $C_5H_{11}OH + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$ (Esta ecuación representa la combustión de alcohol amílico.)

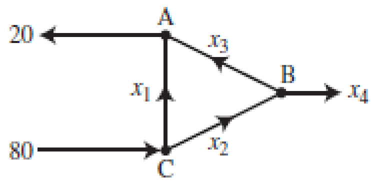
20- Las redes compuestas de ramificaciones y uniones se usan como modelos en campos tan variados como economía, análisis de tránsito e ingeniería.

En estos modelos se asume que el flujo total que llega hacia una unión es igual al flujo que sale de ella. Por ejemplo como la unión mostrada en la figura tiene 25 unidades que llegan a ella, debe haber 25 unidades que salen. Esto se representa por la ecuación lineal: $x_1 + x_2 = 25$



Veremos ejemplos sencillos de estas redes aplicadas a la ingeniería:

20.1- Encuentre el patrón de flujo general de la red que se muestra en la figura.
Suponiendo que todos los flujos son no negativos, ¿cuál el máximo valor posible para x_3?



20.2- En la red de la figura 2 se muestra el flujo del tráfico (en vehículos por hora) sobre varias calles de un solo sentido en el centro de Baltimore durante una día típico temprano por la tarde. Determine el patrón de flujo general para la red.

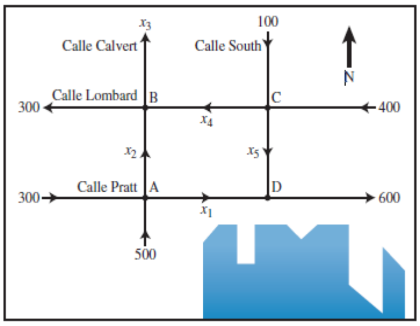


FIGURA 2 Calles de Baltimore

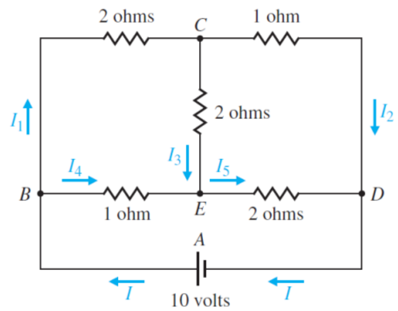
20.3- Otro tipo de red que se analizará, es la red eléctrica, donde se usan dos propiedades conocidas como Leyes de Kirchhoff:

i) La suma algebraica de las corrientes entrantes a un punto de unión o nodo de una red eléctrica es igual a la suma algebraica de las corrientes salientes de dicho nodo.

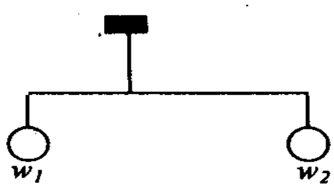
ii) La suma de los productos **IR** (**I** es la intensidad de corriente y **R** es la resistencia) alrededor de una trayectoria cerrada es igual a la tensión total en la trayectoria.

En una red eléctrica, la corriente se mide en unidades ampers, la resistencia en ohms(Ω) y el producto de la corriente y la resistencia en unidades volt (V = I.R) Las baterías se representan por el símbolo y la resistencia se denota por el símbolo

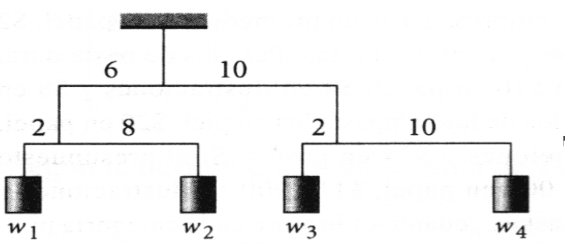
La red que se muestra en la figura tiene una sola fuente de poder A y cinco resistencias. Encuentre las corrientes $I, I_1, \dots, I_5$. Este es un ejemplo de lo que en ingeniería eléctrica se conoce como *circuito puente de Wheatstone*.



21- El principio de equilibrio de dos pesos suspendidos como se ve en la figura 1 establece que dichos pesos estarán equilibrados si $w_1x = w_2y$ (ecuación de equilibrio). Considere el sistema de pesos suspendidos de la figura 2.



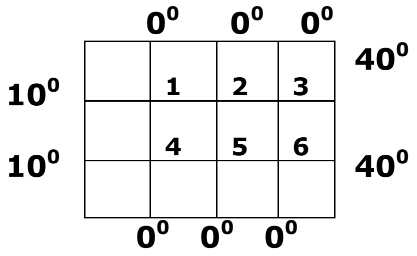
(fig. 1)



(fig. 2)

a) Escriba las ecuaciones de equilibrio
b) Resuelva el sistema
c) ¿Qué puede decir sobre la elección de los pesos w_1, w_2, w_3 y w_4 para hacer que el sistema físico se equilibre?

22- Un aspecto importante en el estudio de la transferencia de calor es determinar la distribución de temperatura de estado estacionario para una placa delgada, cuando se conoce la temperatura alrededor de sus bordes. Suponga que la placa dada en la figura representa una sección transversal de un poste metálico, con flujo de calor despreciable en la dirección perpendicular a la placa.



Sean T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 las temperaturas de los seis nodos interiores a la red de la figura (denominados con 1, 2, 3, 4, 5 y 6). La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de los cuatro nodos más cercanos; Por ejemplo:

$$T_1 = \frac{10 + T_2 + T_4 + 0}{4} \qquad \text{o bien} \qquad 4T_1 = 10 + T_2 + T_4 + 0$$

a- Escriba un sistema de ecuaciones cuya solución estime las temperaturas T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6.
b- Resuelva el sistema.

23- Resuelva empleando métodos numéricos

23.1- Un ingeniero requiere 4800 m^3 de arena, 5810 m^3 de grava fina y 5690 m^3 grava gruesa para la construcción de un proyecto. Existen tres canteras donde pueden obtener estos materiales. La composición en cada cantera es de:

Cantera %	Arena %	Grava Fina %	Grava Gruesa %
1	52	30	18
2	20	50	30
3	25	20	55

¿Cuántos metros cúbicos se debe tomar de cada cantera para cubrir con los requerimientos del ingeniero?

23.2- Para la producción de cuatro tipos de computadoras, se requieren cuatro clases de recursos, horas/hombre, metales, plásticos y componentes electrónicos, en la producción. En el cuadro se resume las cantidades necesarias para cada unote estos recursos en la producción de cada tipo de computadora. Si se dispone diariamente de 504 horas/hombre, 1970 kg de metal, 970 kg de plástico y 601 componentes electrónico. ¿Cuántas computadoras de cada tipo se pueden construir por día?

computadoras	Horas/hombre Kg/computadora	Metales Kg/computadora	Plásticos Kg/computadora	Componentes Unidades/Computadora
1	3	20	10	10
2	4	25	15	8
3	7	40	20	10
4	20	50	22	15