ÁLGEBRA LINEAL

Ingenierías

ÁLGEBRA II

LM - PM

Unidad Nº 1

MATRICES.
DETERMINANTES

FCEyT - UNSE

1.- INTRODUCCIÓN

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS de GRUPO y de CUERPO

Definición 1

Sea $G \neq \varnothing$ y sea $*$ una operación en *G*. El par $(G, *)$ es un ***grupo*** si y sólo si:

A1) $*$ **es una ley de composición interna en *G***. Es decir, $*$ es una función con dominio en el producto cartesiano *G* x *G* y toma valores en *G*, en símbolos

$$\begin{aligned} *: G \times G &\to G \\ (a,\ b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

A2) $*$ **es asociativa en** *G*. En símbolos

$$\forall\, a,\, b,\, c \in G;\ \ (a * b) * c = a * (b * c)$$

A3) **Existe un elemento neutro *e* $\in G$ respecto de la ley** $*$. En símbolos

$$\exists\ e \in \mathrm{G} : \forall\, a \in G;\ a * e = e * a = a$$

A4) **Para cada elemento *a* $\in G$ existe un elemento inverso *a'* $\in G$ respecto a la ley ***. En símbolos

$$\forall\, a \in G;\ \exists\ a' \in G :\ a * a' = a' * a = e$$

Notas

1. La estructura algebraica de grupo ha sido definida en forma axiomática.

2. El axioma A1) suele escribirse de la siguiente manera
   $\forall\, a, b \in G;\ a * b \in G$
3. El axioma A1) indica que el conjunto *G* es **"cerrado"** con respecto a la ley $*$. También suele decirse que el conjunto G es **"estable"** respecto a la operación $*$.

4. En los axiomas A3) y A4) observe detenidamente la posición de los cuantificadores existencial y universal, y obtenga conclusiones.

5. Diremos simplemente "***sea G un grupo***" cuando la ley $*$ esté sobreentendida.

6. Cuando en un grupo *G* la ley de composición interna sea la suma, diremos que *G* es un ***grupo aditivo***. En esta situación el *elemento neutro aditivo* se llama *"elemento nulo"* o simplemente *"cero"* y suele representarse con **0**; y dado $a \in G$ al inverso aditivo de *a*, denominado "*opuesto de a"*, se denota con $-a$.

7. Cuando en un grupo *G* la ley de composición interna sea la multiplicación, diremos que *G* es un ***grupo multiplicativo***.
   En esta situación el *elemento neutro multiplicativo* se le llama *"unidad"* y suele representarse con **1**; y dado $a \in G$ al inverso multiplicativo de *a*, denominado "*recíproco de a"*, se denota con a^{-1}.

Ejemplos de grupos:

Grupos aditivos

- **(Z**, +) El conjunto de los números enteros con la suma de números enteros.

- **(Q**, +) El conjunto de los números racionales con la suma de números racionales.
- **(R**, +) El conjunto de los números reales con la suma de números reales.
- **(C**, +) El conjunto de los números complejos con la suma de números complejos.
- **(R^2**, +) El conjunto de los pares ordenados de números reales (o *vectores del plano cartesiano*) con la suma de pares ordenados definida por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

Aquí, el *cero* es el par (0, 0) y el *opuesto* de (x_1, y_1) es $-(x_1, y_1) = (-x_1, -y_1)$.

- **(R^n**, +) El conjunto de las n-uplas ordenadas de números reales con la suma de n-uplas (con $n \in N$) definida por

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

Donde, el *cero* es la n-upla (0, 0, … , 0) y el *opuesto* de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es

$-(a_1, a_2, \dots, a_n) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

- (Z_3, +). Donde $Z_3 = \{\ \overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2}\ \}$ es el conjunto de las clases residuales módulo 3 y la suma está definida por la siguiente tabla

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Grupos multiplicativos

- **(Q – {0}**, **.**) El conjunto de los números racionales no nulos con la multiplicación de números racionales no nulos.
- **(R – {0}**, **.**) El conjunto de los números reales no nulos con la multiplicación de números reales no nulos.
- **(C – {(0, 0)}**, **.**) El conjunto de los números complejos no nulos con la multiplicación de números complejos no nulos.
- ($Z_3 - \{\ \overline{0}\ \}$, .) Donde $Z_3 - \{\ \overline{0}\ \} = \{\ \overline{1},\ \overline{2}\ \}$ es el conjunto de las clases residuales módulo 3, distintas de la clase del cero, y la multiplicación está definida por la siguiente tabla

.	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

No son grupos:

- El conjunto **N** de los números naturales con la suma de números naturales.
- El conjunto **Z** de los enteros con la diferencia de números enteros.
- El conjunto **R** de los números reales con el producto de números reales.

Definición 2

Sea $(G, *)$ un grupo. El grupo G es ***conmutativo(o abeliano)*** si la ley de composición interna * es conmutativa. Es decir, $\forall\, a, b \in G: \ a*b = b*a$

Ejemplos de grupo conmutativo(o abelinano)

(Z, +), **(Q**, +), **(R**, +), **(C**, +), **(R^n**, +), **(Z$_3$**, **+**)

(Q – {0}, **.**), **(R – {0}**, **.**), **(C – {0}**, **.**), (**Z$_3$ – {** $\overline{0}$ **}**, **.**)

PROPIEDADES

Sea $(G,*)$ un grupo.

Proposición 1

El grupo G admite un único elemento neutro.

Proposición 2

El inverso de cada elemento de G es único.

Proposición 3

El inverso del inverso de cada elemento a de G es a, esto es $(a')' = a$.

Proposición 4

Cualesquiera sean $a, b \in G$, el inverso del elemento $a * b$ es $b' * a'$. Es decir

$$\forall\, a, b \in G: (a*b)' = b' * a'.$$

Proposición 5

Cada elemento del conjunto G es cancelable o regular. Esto es, cualesquiera sean $a, b, c \in G$ se verifica

$$(a * b = a * c \Rightarrow b = c) \wedge (b * a = c * a \Rightarrow b = c)$$

Proposición 6

Cualesquiera sean $a, b, c \in G$, las siguientes ecuaciones en la variable x admiten solución única en G

$$a * x = b \quad \Rightarrow \quad x = a' * b$$
$$x * a = c \quad \Rightarrow \quad x = c * a'$$

Nota Las demostraciones de las proposiciones anteriores quedan para el alumno.

Definición 3

Sea $F \neq \emptyset$ y "+", "**.**" dos operaciones en F. La terna (F, +, **.**) es un ***cuerpo*** si y sólo si:

Ax1) **(F, +)** es grupo abeliano. Esto es

- + es una ley de composición interna en F
  $\forall\, a, b \in F;\ a + b \in F$
- + es asociativa
  $\forall a,b,c \in F : (a+b)+c = a+(b+c)$
- Existe elemento neutro aditivo en F
  $\exists\ 0 \in F : \forall\, a \in F; a+0 = 0+a = a$
- Cada elemento de F admite opuesto en F
  $\forall\, a \in F, \exists -a \in F : a+(-a) = (-a)+a = 0$
- + es conmutativa
  $\forall\, a, b \in F : a+b = b+a$

Ax2) (F-{0}, **.**) es grupo abeliano. Esto es

- **.** es una ley de composición interna
  $\forall\, a, b \in F - \{0\};\ ab \in F - \{0\}$
- **.** es asociativa
  $\forall a,b,c \in F-\{0\} : (ab)c = a(bc)$
- Existe elemento neutro multiplicativo en F- {0}
  $\exists\, 1 \in F-\{0\} : \forall\, a \in F-\{0\}; a1 = 1a = a$
- Cada elemento de F-{0} admite recíproco en F-{0}
  $\forall\, a \in F-\{0\};\ \exists a^{-1} \in F-\{0\} : a\,a^{-1} = a^{-1}a = 1.$
- **.** es conmutativa
  $\forall\, a, b \in F-\{0\}; ab = ba$

Ax3) La multiplicación es distributiva respecto de la suma de izquierda a derecha y de derecha a izquierda

- $(a + b)\, c = ac + bc$
- $a(b + c) = ab + ac$

Ejemplos de cuerpos

$(\boldsymbol{Q},+,\cdot)$, $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$, $(\boldsymbol{C},+,\cdot)$, $(\boldsymbol{Z}_p,+,\cdot)$ con p primo

No son cuerpos

$(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$, $(\boldsymbol{Z}_4, +, .)$

Definición 4

Sea $(F, +, .)$ un *cuerpo.*

a) Sean a y $b \in F$, se define la resta

$$a - b = a + (-b)$$

b) Sean a y $b \in F$ y $a \neq 0$. Se define la división

$$\frac{b}{a} = a^{-1}b$$

PROPIEDADES

Proposición 1

Si $(F, +, .)$ es un cuerpo, entonces $\forall a \in F, a\,0 = 0\,a = 0$

Demostración

$a0 = a(0+0)$ 0 es elemento neutro aditivo

$a0 = a0 + a0$ por distributividad de (.) respecto a (+)

$a0 + 0 = a0 + a0$ 0 es elemento neutro aditivo

$0 = a0$ por Propiedad cancelativa en el grupo $(F, +)$

$0a = (0+0)a$ 0 es elemento neutro aditivo

$0a = 0a + 0a$ por distributividad de (.) respecto a (+)

$0a + 0 = 0a + 0a$ 0 es elemento neutro aditivo

$0 = 0a$ por Propiedad cancelativa en el grupo $(F, +)$

Proposición 2

Si $(F, +, .)$ es un cuerpo, entonces $\forall\, a, b \in F; (-a)b = a(-b) = -(ab)$

Demostración

i)

$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0\,b = 0$

$(-a)b + ab = [(-a) + a]b = 0\,b = 0$

luego $(-a)b = -(ab)$

ii)

$ab + a(-b) = a[b + (-b)] = a0 = 0$
$a(-b) + ab = a[(-b) + b] = a0 = 0$

luego $a(-b) = -(ab)$

Proposición 3
Si $(F, +, .)$ es un cuerpo, entonces $\forall a, b \in F : (-a)(-b) = ab$

Demostración

$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab$

Proposición 4

Si $(F, +, .)$ es un cuerpo, entonces $\forall a, b, c \in F : a(b - c) = ab - ac$

Demostración

$a(b - c) = a[b + (-c)] = ab + a(-c) = ab + [-(ab)] = ab - ac$

Proposición 5

Si $(F, +, .)$ es un cuerpo, entonces $\forall\, x, y \in F; (x\, y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0)$

Demostración
Hay que probar que: $xy = 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow y = 0$
Sea entonces

$$xy = 0 \wedge x \neq 0 \quad (*)$$

Como $x \neq 0 \wedge x \in F$ y $(F\text{-}\{0\}, .)$ es un grupo abeliano, x admite inverso multiplicativo, esto es:

$$x^{-1} \in F : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

En la igualdad (*) multiplicando en ambos miembros por x^{-1}, luego aplicamos Proposición 1 de cuerpo, asociatividad, axioma de inverso y axioma de elemento unidad.

$$\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{x}^{-1}0$$
$$\left(\boldsymbol{x}^{-1}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{y} = 0$$
$$1\boldsymbol{y} = 0$$
$$\boldsymbol{y} = 0$$

Q.E.D.

Nota
La propiedad precedente indica que todo cuerpo F carece de divisores de cero.

Proposición 6

Si $(F, +, .)$ es un cuerpo, entonces vale la ley cancelativa del producto para elementos no nulos de F.

Demostración

Se debe probar que, $\forall x, y, z \in F$; $(xz = yz \wedge z \neq 0 \Rightarrow x = y)$
Sea entonces

$$xz = yz \wedge z \neq 0 \quad (1)$$

Como $z \neq 0, \exists z^{-1} \in F$, en (1) se multiplica en ambos miembros por el inverso de z

$$(xz)z^{-1} = (yz)z^{-1}$$
$$x(zz^{-1}) = y(zz^{-1})$$
$$x1 = y1$$
$$x = y$$

Proposición 7

Si (F, +, **.**) es un cuerpo y $a, b \in F$ y $a \neq 0$, entonces la ecuación de primer grado en la variable x $ax = b$, admite solución única en F

Demostración

Partimos de la ecuación

$$ax = b$$
$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b$$
$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$
$$1x = a^{-1}b$$
$$x = a^{-1}b$$

Luego, $x = a^{-1}b$ es la solución de la ecuación dada y la unicidad de la solución se debe a que a admite un único inverso y la multiplicación es una ley de composición interna en F.

Q.E.D.

Proposición 8

El recíproco (inverso multiplicativo) del opuesto de todo elemento no nulo es igual al opuesto de su recíproco. Esto es

$$\forall\, a \in F - \{0\} \;;\; (-a)^{-1} = -(a^{-1}),$$

Demostración

Queda para el alumno.

2. MATRICES

Definición 1

Sean m y n dos números naturales cualesquiera distintos. Una ***matriz A de tipo mxn*** con elementos de un conjunto F es una ordenación de mn elementos del conjunto F, dispuestos en m filas y n columnas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notas

- Trabajaremos con matrices cuyos elementos pertenecen a un cuerpo como por ejemplo: $\boldsymbol{Q}$ (Racionales)**,** $\boldsymbol{R}$ (Reales)**,** $\boldsymbol{C}$ (Complejos)**,** $\boldsymbol{Z}_2$ (Clases residuales módulo 2), etc.
- El conjunto de las matrices de *m* filas y *n* columnas con elementos de un cuerpo *F* se denota con F^{mxn}.
- Escribiremos $A\in F^{mxn}$ para indicar que la matriz *A* es de tipo *mxn* y tiene elementos del cuerpo *F*.

Ejemplos

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2/3 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{3x5};\quad B=\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}\in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{2}}^{4x3};\quad D=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{2x3};$$

$$E=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{Q}^{3x1};\quad F=\begin{bmatrix} 8i & 1-i \\ 0 & 2+3i \\ 9 & 1 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{C}^{3x2};\quad \mathrm{G}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{1x3}$$

Definición 2

Una ***matriz A de orden n*** con elementos de un conjunto *F*, es una ordenación de n^2 elementos del conjunto *F*, dispuestos en *n* filas y *n* columnas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Notas

- Trabajaremos con matrices cuyos elementos pertenecen a un cuerpo como por ejemplo: $\boldsymbol{Q}$ (Racionales)**,** $\boldsymbol{R}$ (Reales)**,** $\boldsymbol{C}$ (Complejos)**,** $\boldsymbol{Z}_2$ (Clases residuales módulo 2), etc.
- El conjunto de las matrices de orden *n* con elementos de un cuerpo *F*, se denota con F^{nxn}. Este conjunto es un caso particular del conjunto F^{mxn} cuando *m* = *n*.

- Escribiremos $A \in F^{nxn}$ para indicar que la matriz *A* es de orden *n* y tiene elementos del cuerpo *F*.

Ejemplos

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1/7 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -6 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3x3}; \quad J = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 3+i & 4i \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^{2x2}; \quad L = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0{,}75 & 14 \\ 7 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -6 & 2/3 \\ 1 & -7 & 29 & -2 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{Q}^{4x4}$$

Notas

- Una matriz es ***rectangular*** si el número de filas es distinto al número de columnas.
- Una matriz es ***cuadrada*** si el número de filas es igual al número de columnas
- Una matriz real es aquella cuyos elementos son números reales. Una matriz compleja es la que sus elementos números complejos.

Notaciones

Sea la matriz $A \in F^{mxn}$, (con $m \neq n$ ó $m = n$) dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

I. Cada fila de la matriz *A* suele representarse por una matriz del tipo *1xn* denominado vector fila. La fila *i*-ésima viene dada por

$$\forall i = 1,\ldots,m; \quad f_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \in F^{1xn},$$

La matriz *A* puede representarse en término de sus *m* vectores filas f_1, f_2, ..., f_i, ..., f_m, del siguiente modo:

$$A = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

II. Cada columna de la matriz *A* es común representarla por una matriz del tipo *mx1*, llamado vector columna. La *j*-ésima columna de *A* está dada por

$$\forall j = 1,\ldots,n;\quad c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in F^{mx1}$$

La matriz A puede representarse en término de sus n vectores columnas $c_1,\ c_2,\ \ldots, c_j, \ldots,\ c_n$, mediante:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots\ c_j & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

III. Al elemento a_{ij} se le llama ***elemento genérico de la matriz A***. Éste se emplea para denominar la forma en que se denotan los elementos de la matriz y permite escribirla en manera abreviada por,

$$A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

Cuando se conoce de antemano el número de filas y de columnas de la matriz simplemente escribiremos

$$A = \left[a_{ij}\right]$$

IV. Si $A \in F^{nxn}$, los elementos a_{11}, a_{22},…, a_{nn}, forman la ***diagonal principal*** de A.

MATRICES ESPECIALES

Matriz nula

Una matriz perteneciente al conjunto F^{mxn} con $m \neq n$ ó $m = n$, que tiene todos los elementos iguales a cero (elemento neutro aditivo del cuerpo F), se llama ***matriz nula***. En símbolos:

$$\mathrm{O} = \left[o_{ij}\right],\ \text{con}\ \ o_{ij} = 0,\ \ \forall i = 1,\ldots,m \wedge \forall j = 1,\ldots,n$$

Ejemplos

Matrices reales nulas son:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Matriz unidad

Una matriz de orden n con elementos del cuerpo F en la que todos los escalares de la diagonal principal son unos (elemento neutro multiplicativo del cuerpo F) y los restantes elementos de la matriz son ceros (elemento neutro aditivo del cuerpo F) se llama ***matriz unidad* de orden *n*** y se simboliza con I_n. En símbolos:

$$I_n = \left[\delta_{ij}\right], \text{ siendo } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Ejemplos

Matrices reales unidad son:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Una matriz D de orden n con elementos del cuerpo F en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son ceros (elemento neutro aditivo del cuerpo F), recibe el nombre de ***matriz diagonal***. En símbolos:

$$A = \left[a_{ij}\right] \in F^{nxn} \text{ es } \textit{diagonal} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j.$$

Ejemplos

Las siguientes matrices reales son diagonales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

Una matriz A de orden n con elementos del cuerpo F en la cual todos los elementos que están debajo de la diagonal principal son ceros (elemento neutro aditivo del cuerpo F), se llama ***matriz triangular superior***. En símbolos

$$A = \left[a_{ij}\right] \in F^{nxn} \text{ es } \textit{triangular superior} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \text{ si } i > j.$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Una matriz A de orden n con elementos del cuerpo F en la que todos los elementos que están arriba de la diagonal principal son ceros (elemento neutro aditivo del cuerpo F), se llama *matriz triangular inferior*. En símbolos

$$A = \left[a_{ij}\right] \in F^{nxn} \text{ es } \textit{triangular inferior} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \text{ si } i < j.$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ -4 & 3 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1+2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-i & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observaciones

- Todas las matrices diagonales son triangulares superior e inferior.
- La matriz unidad y la matriz nula de orden *n*, son matrices diagonales, por lo tanto tienen la propiedad de ser triangular superior y triangular inferior.

Matriz diagonal

Una matriz *D* de orden *n* con elementos del cuerpo *F* en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son ceros (elemento neutro aditivo del cuerpo *F*), recibe el nombre de ***matriz diagonal***. En símbolos

$$A = \left[a_{ij} \right] \in F^{nxn} \text{ es } \textit{diagonal} \iff a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j \cdot$$

Ejemplos

Las siguientes matrices reales son diagonales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Una matriz *E* de orden *n* con elementos del cuerpo *F* en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son ceros (elemento neutro aditivo del cuerpo *F*) y los elementos de la diagonal principal son todos iguales entre sí, recibe el nombre de ***matriz escalar***. En símbolos

$$A = \left[a_{ij} \right] \in F^{n \times n} \textit{ es una matriz } \textbf{\textit{escalar}} \textit{ si y sólo si } a_{ij} = \begin{cases} \lambda & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observaciones

- Todas las matrices diagonales son triangulares superior e inferior.
- Todas las matrices escalares son diagonales y por lo tanto son triangulares superior e inferior.
- La matriz unidad y la matriz nula de orden *n*, son matrices escalares, por lo tanto tienen la propiedad de ser diagonales y en consecuencia son también triangulares superior e inferior.

IGUALDAD DE MATRICES

Definición 3

Sean m y n dos números naturales cualesquiera (con $m \neq n$ ó $m = n$) y F un cuerpo. Dos matrices $A = \left[a_{ij}\right] \in F^{mxn}$ y $B = \left[b_{ij}\right] \in F^{mxn}$ son iguales si y sólo si sus elementos correspondientes son iguales. En símbolos

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij} \;;\quad \forall\, i \in \boldsymbol{N};\ 1 \le i \le m \;\wedge \forall j \in \boldsymbol{N}; 1 \le j \le n.$$

Ejemplos

En los siguientes ejemplos se puede observar que se satisface la Definición 3

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen(0) & 1 \\ 1/2 & cos(\pi) \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \lim_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

OPERACIONES CON MATRICES

I. SUMA DE MATRICES

Definición 4

Sea $m, n \in \boldsymbol{N}$ con $m \neq n$ ó $m = n$ y F un cuerpo. Sean $A = \left[a_{ij}\right] \in F^{mxn}$ y $B = \left[b_{ij}\right] \in F^{mxn}$. La matriz $C = \left[c_{ij}\right] \in F^{mxn}$, es igual a la suma $A + B$ si y sólo si

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \in F \;;\quad \forall\, i \in \boldsymbol{N};\ 1 \le i \le m \;\wedge \forall j \in \boldsymbol{N}; 1 \le j \le n$$

Observaciones

- Dos matrices se pueden sumar (o *están conformes para la suma*) si los elementos de ambas pertenecen al mismo cuerpo y si son del mismo tipo, o del mismo orden.
- Debido a la Definición 3, se dice que el conjunto F^{mxn} *"es **cerrado** para la suma de matrices"*

Ejemplos

a) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \in \boldsymbol{R}^{2x3}$$

La suma $A + B$ es

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2x3}$$

b) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \in \boldsymbol{R}^{2x2}$$

La suma $A + B$ es:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1/2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2x2}$$

Proposición 1

Sea $m, n \in \boldsymbol{N}$ con $m \neq n$ ó $m = n$ y F un cuerpo. El conjunto F^{mxn} con la suma de matrices, es un grupo conmutativo. Es decir:

i) $\forall\ A, B \in F^{mxn}; A + B \in F^{mxn}$

ii) $\forall\ A, B, C \in F^{mxn}$; $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii) $\exists\ 0 \in F^{mxn} : \forall\ A \in F^{mxn}; A + 0 = 0 + A = A$

iv) $\forall A \in F^{mxn}; \exists -A \in F^{mxn}\ /\ A + (-A) = (-A) + A = 0$

v) $\forall\ A, B \in F^{mxn}$: $A + B = B + A$

Observaciones

- El enunciado i) indica que la suma de matrices es una ley de composición interna en F^{mxn}.
- El enunciado ii) indica que la suma de matrices es asociativa en F^{mxn}.
- El elemento neutro 0 del enunciado iii) es la matriz nula de F^{mxn}.
- En el enunciado iv) la matriz $-A \in F^{mxn}$ es la matriz *opuesta de A* y sus elementos son los opuestos de los elementos de la matriz A. Es decir:

  Si $A = [a_{ij}]$, la matriz *opuesta de A* es $-A = [-a_{ij}]$
- El enunciado v. expresa que la suma de matrices es conmutativa en F^{mxn}.

II. PRODUCTO DE MATRICES

Definición 5

Sean m, p y n tres números naturales cualesquiera (no necesariamente distintos) y F un cuerpo. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in F^{mxp}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} \in F^{pxn}$, el producto de A y B (que se escribe AB), es una matriz $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} \in F^{mxn}$, cuyos elementos c_{ij} son los definidos por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \ , \ \forall\, i \in \boldsymbol{N};\ 1 \leq i \leq m\ \wedge \forall j \in \boldsymbol{N}; 1 \leq j \leq n$$

En forma abreviada se escribe:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Observaciones

- El producto de dos matrices está definido si y sólo si ambas matrices están conformes para el producto, es decir, si los elementos de ambas pertenecen al mismo cuerpo y el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.
- Con frecuencia se escriben productos de matrices sin indicar el tipo u orden de los factores, en tal caso se entenderá que el producto está definido.
- En general, el producto de matrices no es conmutativo

Ejemplos

a) Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{3x2},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{2x2}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.1+2.0 & 1.2+2.(-1)\\ 3.1+4.0 & 3.2+4.(-1)\\ (-1).1+0.0 & (-1).2+0.(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{3x2}$$

Observe que las matrices A y B no están conformes para el producto BA.

b) Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{2x2}$$

Es claro que ambas matrices están conformes para los productos AB y BA

$$AB=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 0 & -3\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{2x2}\quad \text{y}\quad BA=\begin{bmatrix}6 & -9\\ 0 & -3\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{2x2}$$

Observe además que $AB \neq BA$

Proposición 2

Si m, p, n son números naturales cualesquiera y F un cuerpo., entonces se verifican los siguientes enunciados.

i) Si $A\in F^{mxp}$, $B\in F^{pxr}$ y $C\in F^{rxn}$, entonces $(AB)C=A(BC)$

ii) Si $A\in F^{mxp}$, $B\in F^{pxn}$ y $C\in F^{pxn}$, entonces $A(B+C)=AB+AC$

iii) Si $A\in F^{mxp}$, $B\in F^{mxp}$ y $C\in F^{pxn}$, entonces $(A+B)C=AC+BC$

iv) Si $A\in F^{mxn}$, entonces

a) $AI_n = A$, donde I_n es la matriz unidad de orden n.

b) $I_m A = A$, donde I_m es la matriz unidad de orden m.

Proposición 3

Sea F un cuerpo. El conjunto F^{nxn} con el producto de matrices goza de las siguientes propiedades

i) $\forall\, A, B \in F^{nxn}; AB \in F^{nxn}$

ii) $\forall A, B, C \in F^{nxn}$; $(AB)C=A(BC)$

iii) $\forall A, B, C \in F^{nxn}$; $A(B+C)=AB+AC$

iv) $\forall A, B, C \in F^{nxn}$; $(A+B)C=AC+BC$

v) $\forall A \in F^{nxn}; I_n A = A I_n = A$, donde I_n es la matriz unidad de orden n.

III. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Definición 6

Sea m, $n \in$ $\boldsymbol{N}$ con $m \neq n$ ó $m = n$ y F un cuerpo. Sea la matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in F^{mxn}$ y el escalar $r \in F$. El producto del escalar r por la matriz A es la matriz $rA \in F^{mxn}$ definida por:

$$rA = r\left[a_{ij}\right] \overset{def}{=} \left[ra_{ij}\right] \in F^{mxn}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ y $r = 2$, se tiene que $rA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$

Proposición 4

Sea m, $n \in$ $\boldsymbol{N}$, con $m \neq n$ ó $m = n$ y F un cuerpo. Si $r, s \in F$ y $A, B \in F^{mxn}$, entonces se verifica:

i) $r(sA)= (rs)A$

ii) $r(A+B)= rA+rB$

iii) $(r+s)A= rA+sA$

Proposición 5

Sean m, p y n tres números naturales cualesquiera (no necesariamente distintos) y F un cuerpo. Si $r, s \in F$, $A \in F^{mxp}$ y $B \in F^{pxn}$, entonces $A(rB) = (rA)B = r(AB)$

IV. TRANSPOSICIÓN DE MATRICES

Definición 7

Sean $m, n \in \mathbf{N}$ con $m \neq n$ ó $m = n$ y F un cuerpo. Sea la matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in F^{mxn}$. La matriz transpuesta de A es la matriz $A^t = \left[b_{ij}\right] \in F^{nxm}$ si y sólo si $b_{ij} = a_{ji},$ con $1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq m$.

Observación

En otra forma de expresar la matriz transpuesta de la matriz A es la siguiente

Si $A = \left[a_{ij}\right] \in F^{mxn}$, entonces la transpuesta de A es la matriz $A^t = \left[a_{ji}\right] \in F^{nxm}$

Ejemplos

a) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, la transpuesta de A es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, la transpuesta de A es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Nota

La transpuesta de una matriz A de tipo mxn (o de orden n) es la matriz A^t de tipo nxm (o de orden n) que resulta de intercambiar las filas de la matriz A por columnas.

Proposición 6

Sea F un cuerpo.

i) Si $A \in F^{mxn}$, entonces $(A^t)^t = A$

ii) Si $A \in F^{mxn}$ y $B \in F^{mxn}$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$

iii) Si $A \in F^{mxp}$ y $B \in F^{pxn}$, entonces $(AB)^t = B^t A^t$

iv) Si $r \in F \wedge A \in F^{mxn}$, entonces $(rA)^t = rA^t$

Matriz Simétrica

Sea F un cuerpo. Sea una matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in F^{nxn}$.

$$A = \left[a_{ij} \right] \text{ es una matriz simétrica } \overset{def}{\Leftrightarrow} a_{ij} = a_{ji}, \forall i, \forall j .$$

Es decir que, una matriz $A = \left[a_{ij} \right] \in F^{nxn}$ es simétrica si y sólo si $A = A^t$

Ejemplos

Las siguientes matrices son simétricas

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 2-i \\ 2-i & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Antisimétrica

Sea F un cuerpo. Sea una matriz $A = \left[a_{ij} \right] \in F^{nxn}$.

$$A = \left[a_{ij} \right] \text{ es una matriz antisimétrica } \overset{def}{\Leftrightarrow} a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, \forall j .$$

Es decir que, una matriz $A = \left[a_{ij} \right] \in F^{nxn}$ es antisimétrica si y sólo si $A = -A^t$

Observación

Es fácil mostrar que los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son todos nulos. En efecto,

$\forall\ i = 1, 2, \ldots, n;\ a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow \forall\ i = 1, 2, \ldots, n;\ 2a_{ii} = 0 \Rightarrow \forall\ i = 1, 2, \ldots, n;\ a_{ii} = 0$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2-i \\ -2+i & 0 \end{bmatrix}$$

V. INVERSA DE UNA MATRIZ

Definición 8

Sea F un cuerpo. Sea una matriz $A \in F^{nxn}$. La matriz A es inversible sí y sólo si existe una matriz $B \in F^{nxn}$ tal que $AB = BA = I_n$. En símbolos,

$$A \in F^{nxn} \text{ es inversible } \Leftrightarrow \exists\ B \in F^{nxn}:\ AB = BA = I_n$$

Proposición 7

Sea F un cuerpo. Si $A \in F^{nxn}$ es inversible, entonces la matriz A admite una única inversa.

Demostración

Como A es inversible por hipótesis, existe una matriz $B \in F^{nxn}$ tal que $AB = BA = I_n$

Supongamos que A tiene también otra matriz inversa es decir, existe una matriz $C \in F^{nxn}$ tal que $AC=CA=I_n$

Probaremos que $B = C$. En efecto

$$B \underset{(1)}{=} BI_n \underset{(2)}{=} B(AC) \underset{(3)}{=} (BA)C \underset{(4)}{=} I_n C \underset{(5)}{=} C$$

Luego $B=C$.
Por lo tanto si A es inversible, entonces admite una única inversa.

Referencias:
(1) I_n es la matriz unidad (elemento neutro multiplicativo en el producto de matrices).
(2) Por hipótesis $AC= I_n$.
(3) Por asociatividad del producto de matrices.
(4) Por hipótesis $BA= I_n$.
(5) I_n es la unidad para el producto de matrices.

Q.E.D.

Notación

Si F es un cuerpo y si $A \in F^{nxn}$ es inversible, representaremos a su única inversa con A^{-1}.

Ejemplo

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, la inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Observación

No toda matriz es inversible, como ocurre con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Proposición 8

Si F es un cuerpo y si $A, B \in F^{nxn}$ son matrices inversibles, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

Luego la inversa de *AB* es $B^{-1}A^{-1}$

Q.E.D.

3. DETERMINANTES

Función Determinante de Orden n

Sea *F* un cuerpo y sea una matriz *A* de orden *n* con elementos en *F*, dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in F^{n\times n}$$

La matriz *A* expresada en términos de sus columnas, se representa por

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix} \in F^{n\times n}, \text{ donde}$$

$$\forall j = 1, \dots, n; \quad c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \in F^{n\times 1}$$, son las columnas de la matriz *A*.

Observación

Trabajaremos con matrices expresadas en términos de sus columnas, para desarrollar el tema, por la simplicidad que ello representa y que podremos advertirlo de inmediato.

Definición 1

La función:

$$D : F^{n\times n} \to F$$
$$A \mapsto D(A)$$

es una función determinante de orden n si y sólo si se verifican los siguientes axiomas:

I. $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$; $D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \hat{c}_j + \bar{c}_j & \cdots & c_n \end{pmatrix} =$

j-ésima columna

$$= D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \hat{c}_j & \cdots & c_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \bar{c}_j & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

j-ésima columna j-ésima columna

II. $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$; $D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & r\, c_j & \cdots & c_n \end{pmatrix} = r\, D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_n \end{pmatrix}$

j-ésima columna j-ésima columna

III. Si $j \neq k \wedge c_j = c_k$ entonces

$$D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_k & \cdots & c_n \end{pmatrix} = 0$$

IV. $D\left(I_n\right) = 1$

Notas

1. Los Axiomas I. y II., indican que D es lineal respecto a cada columna, por lo que suele decirse que es una función *n-lineal*.
2. El Axioma III., nos dice que D es *alternada*.
3. El Axioma IV., indica que la matriz unidad tiene por imagen el escalar 1.

Definición 2

Sea una función determinante de orden n D: $F^{nxn} \longrightarrow$ F

$$A \longmapsto D(A)$$

Al escalar $D(A) \in F$, le llamaremos "***el determinante de la matriz A***" y le denotaremos con

$$D(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo de aplicación del Axioma I.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0+3 \\ 4 & 5 & 2+4 \\ 7 & 8 & 10-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo de aplicación del Axioma II.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3.1 \\ 4 & 5 & 3.2 \\ 7 & 8 & 3.3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo de aplicación del Axioma III.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & cos(0) \\ 0 & 5 & 4 & sen(\pi) \\ 1 & 3 & -7 & tg(\pi/4) \\ -1 & -1 & 6 & cos(\pi) \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo de aplicación del Axioma IV.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Proposición 1 (Sin demostración)

Para cada $n \in$ N, existe una única función determinante de orden *n.*

La Función Determinante de Orden 1

Proposición 2

Sea la función

$$D: F^{1\times 1} \rightarrow F$$
$$A = [a_{11}] \mapsto D(A) = |a_{11}| \overset{def}{=} a_{11}$$

Entonces D es la función determinante de orden 1.

Demostración (para el alumno)

Ejemplo

$|3| = 3$

Notas

1. Es fácil demostrar que D_1 es una función determinante de orden 1 ya que sólo basta mostrar que se verifican los axiomas de la Definición 1.
2. No se debe confundir un determinante de orden 1 con el valor absoluto de un número real. Para ello basta observar el siguientes determinante de una matriz de orden 1: $|-1| = -1$, mientras que si se considera el valor absoluto del número real -1 se tiene $|-1| = 1$.

Función Determinante de Orden 2

Proposición 3

Sea la función

$D: \quad F^{2\text{x}2} \rightarrow F$ tal que si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in F^{2\text{x}2}$, se define

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{def}{=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Entonces D es la función determinante de orden 2.

Demostración (para el alumno)

Ejemplos

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$
- $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 - (-12) = 12$

REGLA DE SARRUS PARA CALCULAR DETERMINANTES DE MATRICES DE ORDEN 3

Sea el siguiente determinante de una matriz de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se puede calcular este determinante empleando una suma algebraica de productos de elementos dada por

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

Nota:

Se puede pensar que es complicado recordar esta suma algebraica de productos, pero ahora se expondrá un modo sencillo de lograrlo.

Pasos para calcular el determinante de una matriz de orden 3

Paso 1.
Se anotan las filas del determinante dado y debajo de ellas se repiten las dos primeras filas

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Paso 2.
Se suman los productos de los elementos ligados por las flechas rojas

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Paso 3.
Se suman los productos de los elementos ligados por las flechas verdes

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Paso 4.
Al resultado obtenido en el paso 2 se le resta el obtenido en el paso 3**.**

<u>Ejemplo</u>

Calcule el siguiente determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>Esquema de los Pasos</u>

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

luego

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.5.9 + 4.8.3 + 7.2.6 - (4.2.9 + 1.8.6 + 7.5.3) = 0$$

<u>PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES</u>

Para las siguientes Proposiciones consideraremos dada la función determinante de orden n ($n \in N$)

$$\begin{array}{rccc} D: & F^{nxn} & \to & F \\ & A & \mapsto & D(A), \end{array}$$

en donde F es un cuerpo.

<u>Proposición 4</u>

Si en una columna (fila) de una matriz todos los elementos son ceros, entonces el determinante de la matriz es igual a cero.

<u>Demostración</u>

Sea $A \in F^{nxn}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todos los elementos de la primera columna de la matriz *A* son ceros, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Si expresamos a la matriz *A* en término de sus columnas, esto es

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Entonces es claro que podemos expresar a la primera columna del siguiente modo

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} = 0\, \bar{c}_1,$$

con $\alpha_{i1} \in F, \forall i = 1,\dots,n$ (es decir, los α_{i1} son escalares cualesquiera del cuerpo *F*)

Calculemos el determinante de la matriz A

$$D(A) = D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} D\begin{pmatrix} 0\,\bar{c}_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} 0\, \underbrace{D\begin{pmatrix} \bar{c}_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix}}_{\in F} = 0$$

<u>*Referencias:*</u>
(1) Reemplazando c_1.
(2) Por Axioma II. de la Definición 1.

Q.E.D.

<u>Proposición 5</u>

El determinante de una matriz no varía, si a una columna (fila) se le suma un múltiplo escalar de otra columna (fila).

Demostración

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_k & \dots & c_n \end{bmatrix}$ y sea $r \in F$.

A efectos de la demostración, se construye una matriz *A'* con la siguiente propiedad*:*

Todas las columnas de *A'* son las columnas de *A*, excepto la j-ésima que se la obtiene mediante la suma $c_j + rc_k$ (es decir la columna c_j de *A* más *r* veces la columna c_k de *A*). Así, resulta

$$A' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j + rc_k & \dots & c_k & \dots & c_n \end{bmatrix}, \text{ con } r \in F .$$

Se probará que $D(A') = D(A)$. En efecto

$$D(A') = D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j + rc_k & \dots & c_k & \dots & c_n \end{pmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \underbrace{D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_k & \dots & c_n \end{pmatrix}}_{= D(A)} + D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & rc_k & \dots & c_k & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{(2)}{=} D(A) + rD\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k & \dots & c_k & \dots & c_n \end{pmatrix} \underset{(3)}{=} D(A) + r0 = D(A) + 0 = D(A)$$

Por lo tanto, $D(A') = D(A)$

Referencias

(1) Por Ax.$_1$ de determinantes.
(2) Por Ax.$_2$ de determinantes.
(3) Por Ax.$_3$ de determinantes.

Q.E.D.

Proposición 6

Si *A* es una matriz de orden *n* y *A´* es la matriz que resulta de intercambiar dos columnas (filas) de la matriz A, entonces el determinante de *A´* es el opuesto del determinante de *A*.

En símbolos

Si $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_k & \dots & c_n \end{bmatrix} \in F^{nxn}$ y

$$A' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k & \dots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix} \in F^{nxn},$$

entonces

$$D(A') = -D(A)$$

Demostración

Con las columnas de *A* se construye la matriz

$$B = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j + c_k & \dots & c_j + c_k & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Es claro que *B* tiene dos columnas iguales, por lo tanto por el Axioma III de la Definición 1, el determinante de B es cero, esto es

$$\boxed{D(B) = 0} \quad (*)$$

Por otra parte

$$D(B) = D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j + c_k & \dots & c_j + c_k & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(1)}{=} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_k & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k & \dots & c_k & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=} 0 + D(A) + D(A') + 0 = D(A) + D(A')$$

es decir

$$D(B) = D(A) + D(A')$$

y como $D(B) = 0$, por (*), resulta

$$D(A) + D(A') = 0$$

luego

$$D(A') = -D(A)$$

Referencias:
(1) Por Axioma I. de la Definición 1.
(2) Por Axioma III. de la Definición 1.

Q.E.D.

Proposición 7

Si una columna (fila) de una matriz *A*, es combinación lineal de las restantes columnas de *A*, entonces $D(A) = 0$.

Demostración

Sea $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_j & c_{j+1} & \dots & c_n \end{bmatrix} \in F^{n \times n}$

y c_j combinación lineal de las restantes columnas de *A*, es decir:

$$c_j = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_{j-1} c_{j-1} + \alpha_{j+1} c_{j+1} + \dots + \alpha_n c_n.$$

Con lo que:

$$D(A) = D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_j & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(1)}{=} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_{j-1} c_{j-1} + \alpha_{j+1} c_{j+1} + \dots + \alpha_n c_n & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \alpha_1 c_1 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \alpha_2 c_2 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \quad \dots \quad +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \alpha_{j-1} c_{j-1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \alpha_{j+1} c_{j+1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \quad \dots \quad +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \alpha_n c_n & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(3)}{=} \alpha_1 D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_1 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \alpha_2 D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_2 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ \alpha_{j-1} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_{j-1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \alpha_{j+1} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_{j+1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ \alpha_n D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_n & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(4)}{=} \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_{j-1} 0 + \alpha_{j+1} 0 + \dots + \alpha_n 0 = 0$$

Referencias:
(1) Reemplazando c_j.
(2) Por Axioma I. de la Definición 1.
(3) Por Axioma II. de la Definición 1.
(4)Por Axioma III. de la Definición 1.

Q.E.D.

Proposición 8

Si $A \in F^{nxn}$, $r \in F$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces $D(rA) = r^n D(A)$

Demostración:

Sea $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix}$.

Entonces:

$$D(rA) = D\left(r\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix}\right) \underset{(1)}{=} D\begin{pmatrix} rc_1 & rc_2 & \dots & rc_j & \dots & rc_n \end{pmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} r^n \underbrace{D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix}}_{= D(A)} = r^n D(A)$$

Referencias:
(1) Por producto de un escalar por una matriz.
(2) Por Axioma II. de la Definición 1.

Q.E.D.

Proposición 9

Si A *y* B son matrices de orden n entonces $D(AB)= D(A)\, D(B)$.

Proposición 10

El determinante de toda matriz de orden n coincide con el de su transpuesta. Es decir $D(A)= D(A^t)$.

COFACTOR

Definición 3

Sea $A \in F^{n\times n}$, dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El cofactor del elemento genérico a_{ij} es el escalar del cuerpo F que se obtiene por

$$A_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} D\left(A(i/j)\right).$$

Es decir, es el producto de −1 elevado al exponente (i+j), por el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz A, la fila "i" y la columna "j".

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Los cofactores de cada uno de sus elementos son:

- $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$

- $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 20) = -19$

- $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 15 = 15$

- $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$

- $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

- $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 10) - 10$

- $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8$

- $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4$

- $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$

<u>Desarrollo del determinante de una matriz por medio de los cofactores de los elementos de una fila o de una columna</u>

Sea $A \in F^{n \times n}$, dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Si elegimos la fila *i*:

$$D(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}$$

- Si elegimos la columna *j*:

$$D(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj}$$

Ejemplo

Se desea calcular el determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

para ello se tendrán en cuenta los cofactores de los elementos calculados precedentemente.

- Si se efectúa el desarrollo del determinante por la fila 3:

$$D(A)=-5A_{31}+0A_{32}+1A_{33}=-5.8+0.(-4)+1.5=-35$$

- Si se efectúa el desarrollo del determinante por la columna 2:

$$D(A)=2A_{12}+3A_{22}+0A_{32}=2.(-19)+3.1+0.(-4)=-35$$

Proposición 11

I. Si una matriz es triangular inferior o superior, su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

II. El determinante de la matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Demostración (queda para el alumno)

MATRIZ DE COFACTORES

Definición 4

Sea $A\in F^{n\times n}$, dada por

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz de cofactores es la que resulta de sustituir en la matriz A cada elemento por su cofactor, esta es

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{mj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Utilizando los cofactores ya obtenidos de la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, la matriz de cofactores es $\begin{bmatrix} 3 & -19 & 15 \\ 2 & 1 & -10 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

MATRIZ ADJUNTA

Definición 5

Sea $A \in F^{n \times n}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz adjunta de A, es la transpuesta de la matriz de cofactores, y se denota con $Adj(A)$. Es decir

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Utilizando los cofactores ya encontrados de la matriz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, resulta que la matriz adjunta de A es

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -19 & 15 \\ 2 & 1 & -10 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -19 & 1 & -4 \\ 15 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

Proposición 12

Sea $A \in F^{n\times n}$. La suma de los productos de los elementos de una fila de la matriz A por los cofactores correspondientes a los elementos de otra fila es igual a cero ("0").

Demostración:

Sea $A \in F^{n\times n}$, dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

y sea

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+a_{i1} & a_{r2}+a_{i2} & \cdots & a_{rn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in F^{n\times n}.$$

por Proposición 2, se tiene que

$$D(A) = D(A').$$

Desarrollando el determinante del segundo miembro de la igualdad precedente, por medio de los cofactores de los elementos de la fila *r*, se tiene

$$D(A)=D(A')=\left(a_{r1}+a_{i1}\right)\overbrace{A'_{r1}}^{=A_{r1}}+\left(a_{r2}+a_{i2}\right)\overbrace{A'_{r2}}^{=A_{r2}}+\dots+\left(a_{rn}+a_{in}\right)\overbrace{A'_{rn}}^{=A_{rn}}=$$

$$\underset{(1)}{=}a_{r1}A_{r1}+a_{i1}A_{r1}+a_{r2}A_{r2}+a_{i2}A_{r2}+\dots+a_{rn}A_{rn}+a_{in}A_{rn}=$$

$$\underset{(2)}{=}\underbrace{\left(a_{r1}A_{r1}+a_{r2}A_{r2}+\dots+a_{rn}A_{rn}\right)}_{=D(A)}+\left(a_{i1}A_{r1}+a_{i2}A_{r2}+\dots+a_{in}A_{rn}\right)=$$

$$=D(A)+\left(a_{i1}A_{r1}+a_{i2}A_{r2}+\dots+a_{in}A_{rn}\right)$$

Luego
$$D(A)=D(A)+\left(a_{i1}A_{r1}+a_{i2}A_{r2}+\dots+a_{in}A_{rn}\right)$$

por lo tanto
$$a_{i1}A_{r1}+a_{i2}A_{r2}+\dots+a_{in}A_{rn}=0\,,$$

ésta es la suma de los productos de los elementos de la fila “*i*”, por los cofactores de los elementos de la fila “*r*”.

Referencias:
(1) Por distributividad de (.) respecto de (+).
(2) Por asociatividad de +.

Q.E.D.

Proposición 13

Propiedad de la adjunta de una matriz

Sea $A\in F^{n\times n}$, entonces
$$A\,Adj(A)=Adj(A)\;A=D(A)I_n$$

Demostración

$$A\,Adj(A)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}A_{11}+\dots+a_{1n}A_{1n}&a_{11}A_{21}+\dots+a_{1n}A_{2n}&\cdots&a_{11}A_{n1}+\dots+a_{1n}A_{nn}\\a_{21}A_{11}+\dots+a_{2n}A_{1n}&a_{21}A_{21}+\dots+a_{2n}A_{2n}&\cdots&a_{11}A_{n1}+\dots+a_{1n}A_{nn}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}A_{11}+\dots+a_{nn}A_{1n}&a_{n1}A_{21}+\dots+a_{nn}A_{2n}&\cdots&a_{n1}A_{n1}+\dots+a_{nn}A_{nn}\end{bmatrix}=$$

$$\underset{(1)}{=} \begin{bmatrix} D(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(A) \end{bmatrix} \underset{(2)}{=} D(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = D(A) I_n$$

Procediendo análogamente se llega a

$$Adj(A)\ A = \begin{bmatrix} D(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(A) \end{bmatrix} = D(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = D(A) I_n$$

Referencias:
(1) Por desarrollo del determinante de *A* por medio de cofactores.
(2) Por Proposición 13.

Q.E.D.

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in F^{n \times n}$ sea inversible es que su determinante sea distinto de cero.

Simbólicamente:

$$A \in F^{n \times n} \text{ inversible} \Leftrightarrow D(A) \neq 0$$

Demostración

$\Rightarrow)$ Si *A* es inversible entonces $D(A) \neq 0$.
Por definición se tiene que

$$A \in F^{n \times n} \text{ inversible} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in F^{n \times n} : AA^{-1} = A^{-1}A = I_n .$$

aplicando la función determinante a ambos miembros

$$D\left(AA^{-1}\right) = D\left(A^{-1}A\right) = D\left(I_n\right)$$

por Proposición 9 y por Axioma IV de la Definición 1

$$D(A)D\left(A^{-1}\right) = D\left(A^{-1}\right)D(A) = 1$$

Luego $D(A) \neq 0$ ya que el producto de dos escalares es 1, si ninguno de los factores es cero.

$\Leftarrow)$ Si $D(A) \neq 0$ entonces *A* es inversible.

por la propiedad de la adjunta de una matriz

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = D(A) I .$$

Como por hipótesis $D(A) \neq 0$, existe $\dfrac{1}{D(A)}$

premultiplicando por $\dfrac{1}{D(A)}$ en los tres miembros:

$$\frac{1}{D(A)}\left(A \cdot Adj(A)\right) = \frac{1}{D(A)}\left(Adj(A) \cdot A\right) = \frac{1}{D(A)}\left(D(A) I\right) \Rightarrow$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} A\left(\frac{1}{D(A)} Adj(A)\right) = \left(\frac{1}{D(A)} Adj(A)\right) A = \left(\frac{1}{D(A)} D(A)\right) I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{D(A)} Adj(A)\right) = \left(\frac{1}{D(A)} Adj(A)\right) A = I$$

por lo tanto existe la matriz $\dfrac{1}{D(A)} Adj(A)$ que conmuta en el producto con A y cuyo producto se obtiene la matriz unidad.

Luego, por definición A es inversible con lo cual existe A^{-1} y es única por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} Adj(A).$$

Referencias:

(1) Por propiedad del producto de escalar por matriz.

Q.E.D.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Utilizando los resultados obtenidos anteriormente:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -19 & 1 & -4 \\ 15 & -10 & 5 \end{bmatrix} \wedge \ D(A) = -35$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} Adj(A) = -\frac{1}{35}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -19 & 1 & -4 \\ 15 & -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} & -\frac{2}{35} & -\frac{8}{35} \\ \frac{19}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{4}{35} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

Proposición 14

Si A es una matriz inversible entonces el determinante de la inversa de A es igual al recíproco del determinante de la matriz A. Esto es

$$D(A^{-1}) = \frac{1}{D(A)}$$

Demostración

Como A es inversible, entonces $\exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

por lo tanto

$$D\left(AA^{-1}\right) = D\left(I_n\right) \underset{(*)}{\Rightarrow} D(A)D\left(A^{-1}\right) = 1 \Rightarrow D\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{D(A)}$$

Análogamente

$$D\left(A^{-1}A\right) = D\left(I_n\right) \underset{(*)}{\Rightarrow} D\left(A^{-1}\right)D(A) = 1 \Rightarrow D\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{D(A)}$$

luego

$$D(A^{-1}) = \frac{1}{D(A)}$$

Referencias:

(*) Por Proposición 9 y Axioma IV. de la Definición 1.

Q.E.D.