ÁLGEBRA LINEAL

Ingenierías

ÁLGEBRA II

LM - PM

Unidad Nº 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales

FCEyT - UNSE

Unidad Nº 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En esta unidad trabajaremos con el cuerpo de los números reales o el cuerpo de los números complejos. De modo que cuando digamos "Sea *F* un cuerpo" entenderemos que se trata de ***R*** o ***C***.

I. OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS DE UNA MATRIZ

Definición 1

Sea *F* un cuerpo. Se llaman ***operaciones elementales de filas*** sobre una matriz $A \in F^{mxn}$ a las siguientes:

- *Multiplicación de un escalar* $k \neq 0$ *por una fila.*
  Notación: $k\, f_i$, $k \neq 0$

- *Suma de una fila con un múltiplo escalar de otra fila.*
  Notación: $f_i + k\, f_r$, con $i \neq r$

- *Intercambio de dos filas.*
  Notación: $f_i \to f_r$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1 \to f_2 \downarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5} f_2 \downarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3 + (-3) f_2 \downarrow$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}$$

Los tres tipos de *operaciones elementales de fila* de la Definición 1, son tales que, efectuándose una de ellas en una matriz *A*, tras la cual se obtiene una matriz *B*, se puede volver a la matriz *A* realizando una operación elemental del mismo tipo en la matriz *B*. Es decir, "para cada operación elemental de filas existe una operación elemental de filas del mismo tipo, llamada *operación inversa*".

Operaciones elementales inversas

- $\frac{1}{k} f_i$ *con* $k \neq 0$ *simboliza la operación inversa de* $k\, f_i$
- $f_i + (-k)\, f_r$ *simboliza la operación inversa de* $f_i + k f_r$
- $f_r \longrightarrow f_i$ *simboliza la operación inversa de* $f_i \longrightarrow f_r$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1 \to f_2 \downarrow \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \uparrow f_2 \to f_1$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5} f_2 \downarrow \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \uparrow 5 f_2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3 + (-3) f_2 \downarrow \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \uparrow f_3 + 3 f_2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{bmatrix}$$

Matrices equivalentes por filas

Definición 2

Sea *F* un cuerpo y sean $A, B \in F^{mxn}$.

B es equivalente por filas a *A* (*A*~*B*) si y sólo si existe una sucesión finita de operaciones elementales de filas que transforma la matriz *A* en la matriz *B*.

Proposición 1

La equivalencia por filas de matrices es una ***relación de equivalencia***. Esto es

a) *Reflexiva* Toda matriz es equivalente por filas a sí misma. En símbolos, $A \sim A$.

b) *Simétrica* Si una matriz es equivalente por filas a otra, entonces ésta es equivalente a la primera. En símbolos, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

c) *Transitiva* Si una matriz es equivalente por filas a otra y ésta es equivalente a una tercera, entonces la primera es equivalente a la primera. En símbolos, $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Matriz escalón por filas

Definición 3

Sea F un cuerpo. Una matriz $E \in F^{mxn}$ se llama ***matriz escalón por filas*** si y sólo si E es la matriz nula, o si E verifica las siguientes condiciones:

1. Si E tiene filas nulas, éstas se encuentran debajo de todas las filas no nulas.

2. El primer elemento no nulo (a partir de la izquierda) de cada fila no nula de E es un 1. A este 1 se le denomina "***uno principal***" o "***uno pivote***".

3. Las filas no nulas de E están dispuestas de tal forma que cada una de ellas presenta a la izquierda del ***uno principal*** más ceros que la fila precedente.

Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Notas

a) En cualquier matriz escalón por filas, todos los elementos situados debajo del 1 principal de una fila son ceros.

b) En toda matriz escalón por filas, las columnas que contienen a los 1 principales se llaman ***columnas principales***.

c) En toda matriz escalón por filas, sus filas están en "***escalera descendente***", es decir:

- El 1 principal de cada fila se encuentra en la esquina izquierda y por encima de cada peldaño.
- La altura de cada peldaño es igual a la "***altura***" de una fila.
- Debajo de la escalera todos los elementos son ceros.

Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En cada matriz escalón por filas B, C, D y G se ha trazado la escalera descendente.

d) Dada una matriz, es posible llegar a diferentes matrices escalón por filas, con tan sólo cambiar la sucesión de operaciones elementales de filas sobre la matriz dada.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 + (-3) f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} f_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3} f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 + (-5) f_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{10} f_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} = C$$

Se puede observar que tanto *B* como *C* son matrices escalón por filas de la matriz *A*, pero *B* es diferente de *C*.

Proposición 2

1. Toda matriz es equivalente por filas a todas sus matrices escalón por filas.

2. Dada una matriz, todas sus matrices escalón por filas tienen el mismo número de filas no nulas.

Rango de una matriz

Definición 4

Sea F un cuerpo. Sean $A \in F^{mxn}$ y E una matriz escalón por filas de A. Se llama ***rango*** de la matriz A, al máximo número de filas no nulas de la matriz escalón por filas E.

Al rango de la matriz A se le denota con ***rg A***

Nota

De la definición, podemos afirmar que el rango de toda matriz escalón por filas es el máximo número de filas no nulas de dicha matriz.

Ejemplos

Dadas las matrices

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Es claro que

rg B = 2, *rg C* = 3 *y* *rg D* = 2.

Notas

- Por definición, las matrices nulas tienen rango cero.
- El rango de una matriz es el mayor número de peldaños de cualquiera de sus matrices escalón por filas.

Proposición 3

Sea F un cuerpo. Si $A \in F^{mxn}$ y E es una de sus matrices escalón por filas.

a) El numero de columnas principales de la matriz escalón por filas E, es igual al rango de A.

b) $rg\, A \leq$ m y $rg\, A \leq$ n

c) $rg\, A \leq$ menor (m, n)

Matriz escalón reducida por filas

Definición 5

Sea F un cuerpo. Una matriz $R \in F^{mxn}$, se llama ***matriz escalón reducida por filas*** si y sólo si R es la matriz nula, o si R verifica las siguientes condiciones:

1. Si R tiene filas nulas, éstas se encuentran debajo de todas las filas no nulas.
2. El primer elemento no nulo (a partir de la izquierda) de cada fila no nula de R es un 1. A este 1 se le denomina "***uno principal***" o "***uno pivote***".
3. Las filas no nulas de R están dispuestas de tal forma que cada una de ellas presenta a la izquierda del ***uno principal*** más ceros que la fila precedente.
4. En las columnas principales de R, los elementos que están arriba y abajo del 1 principal son ceros.

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Notas

- Toda matriz *escalón reducida por filas* es una matriz *escalón por filas*, pero no ocurre a la inversa.
- Toda matriz de F^{mxn} tiene <u>*una única*</u> matriz escalón reducida por filas.
- Si R es la matriz escalón reducida por filas de una matriz A, y si E es una matriz escalón por filas de la misma matriz A, las matrices R y E tienen el mismo número de filas no nulas.

Rango de una matriz

El concepto de rango de una matriz A puede caracterizarse en términos de la única matriz escalón reducida por filas de A como sigue.

Definición 6

Sea F un cuerpo. Sean $A \in F^{mxn}$ y R la matriz escalón reducida por filas de la matriz A. El rango de la matriz A es el máximo número de filas no nulas de la matriz escalón reducida por filas R.

Proposición 4

Si $A \in F^{mxn}$ y R es la matriz escalón reducida por filas de A.

a) El número de columnas principales de la matriz escalón reducida por filas R es igual al rango de A.

b) $rg\,A \le$ m y $rg\,A \le$ n

c) $rg\,A \le$ menor (m, n)

Ejemplo

$$
\begin{array}{c}
A \\
\downarrow \\
\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$f_1 \to f_2 \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5} f_2 \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} f_3 \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow E$$

$$f_2 + (-2)\ f_3 \downarrow$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\uparrow \\
R
\end{array}
$$

La matriz R es la matriz escalón reducida por filas de la matriz A, mientras que E es una matriz escalón por filas.

Se observa que tanto E como R poseen 3 filas no nulas, por lo tanto el $rg\ A = rg\ E = rg\ R = 3$.

II. <u>ECUACIONES LINEALES</u>

Las ecuaciones lineales, que son generalizaciones de ecuaciones de rectas en el plano real R^2, tienen diversas aplicaciones tales como el balanceo de ecuaciones químicas, resolución de problemas referentes a redes eléctricas, el análisis de problemas de insumo/producción en economía, etcétera.

Recordemos que una de las maneras de representar en forma algebraica una recta en el plano cartesiano R^2 es mediante la ecuación

$$a_1x+a_2y=b,$$

donde x e y son las *variables*, a_1 y a_2 son escalares reales no simultáneamente nulos denominados *coeficientes* y b es también un escalar real llamado *término independiente*.

En R^2 una ecuación de este tipo se llama ***ecuación lineal en las variables x*** **e *y*.**

Un plano en el espacio R^3 se puede representar algebraicamente mediante una ecuación de la forma:

$$a_1x + a_2y + a_3z = b,$$

donde x, y, z son las variables, los coeficientes a_1, a_2 y a_3 son escalares reales no simultáneamente nulos, y el término independiente b un escalar real.

En R^3 una ecuación de este tipo se llama **ecuación lineal en las variables *x*, *y* y *z*.**

Ejemplos

✓ En R^2, son ecuaciones lineales
$2x - 3y = -4$, $x + 7y = 2$, $-3y = 6$, $9x=-1$

✓ En R^3, son ecuaciones lineales
$2x-3y = -4$, $5x-y+2z = 3$, $y-2z = 0$, $x = -4$, $z=0$

Nota

En todo lo que sigue trabajaremos con ecuaciones lineales con coeficientes y término independientes pertenecientes al cuerpo de los números reales ***R*** o al cuerpo de los números complejos ***C***.

Definición 1

Si F es un cuerpo (***R*** o ***C***), en F^n una **ecuación lineal en las variables $x_1, x_2,\ldots, x_n$** se representa por:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

donde, $a_1, a_2,\ldots, a_n \in F$ son los coeficientes, no simultáneamente nulos, de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $b \in F$ es el término independiente.

Ejemplos

✓ En R^4 son ecuaciones lineales en las variables x, y, z, w
$2x - y = 6$, $x + 2y + 3z - 2w = 0$, $-x - 4z + w = 3$

✓ En R^5 son ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5
$x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 3$, $x_2 + 2x_4 - 3x_5 = -2$, $2x_1 + 7x_5 = 0$

Definición 2

Una ***solución*** de la ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

es una n-upla $(s_1, s_2,\ldots,s_n)$ de escalares del cuerpo F, tales que la ecuación se satisface cuando en ella se hace la sustitución: $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots$, $x_n = s_n$

Ejemplo

En R^3, algunas de las infinitas soluciones de la ecuación

$$3x + 2y - z = 1$$

son las ternas (1,1,4); (0,1,1); (-1,2,0).

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición 3

Un sistema de *m* ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con escalares del cuerpo *F* (***R*** o ***C***), es una expresión de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

donde, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las variables o incógnitas, los coeficientes a_{ij} con $1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$ y los términos independientes b_i, con $1 \le i \le m,$ son escalares del cuerpo *F*.

Ejemplo

Un sistema de 3 ecuaciones lineales en las incógnitas *x, y, z, t* sobre el cuerpo ***R*** es:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + \ t \ = 1 \\ \ x + \ y - 2z \qquad = 3 \\ -x \qquad + \ z + 2t = 0 \end{cases}$$

Representación matricial

El sistema de ecuaciones lineales (1) puede representarse en una forma más sencilla mediante la *ecuación matricial*:

$$AX = B \qquad (2)$$

Esto es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

donde:

- A (*Matriz de coeficientes*) es una matriz de tipo mxn formada por los coeficientes de las incógnitas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

- X (*Vector incógnita*) es un vector columna de tipo nx1 cuyas componentes son las incógnitas

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

- B (*Vector de términos independientes*) es un vector columna de tipo mx1 formado por los términos independientes.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

<u>Nota</u>

Si en la ecuación matricial (3) se efectúa el producto de la matriz de coeficientes con el vector incógnita y luego se igualan las componentes del vector resultante con las componentes correspondientes del vector de términos independientes se obtiene el sistema de ecuaciones lineales (1).

<u>Ejemplo</u>

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ -x + z + 2t = 0 \end{cases}$$

se expresa en forma matricial del siguiente modo

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales (1) también puede representarse en términos de las columnas de la matriz de coeficientes.

En efecto, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son los vectores columnas de la matriz A, y B es el vector columna de términos independientes, el sistema lineal (1) se representa por

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = B \qquad (4)$$

o bien por

$$\sum_{i=1}^{n} x_iA_i = B \qquad (5)$$

Nota

Si se efectúan las operaciones indicadas en el primer miembro y luego se igualan las componentes del vector resultante con las componentes correspondientes del vector de términos independientes se obtiene el sistema de ecuaciones lineales (1).

Ejemplo

El sistema del ejemplo precedente se expresa en términos de las columnas de la matriz de coeficientes mediante:

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistema homogéneo y no homogéneo

Sea un sistema de ecuaciones lineales *AX=B*, con $A \in F^{mxn}$, $B \in F^{mx1}$.

Definición 4

El sistema de ecuaciones lineales *AX=B* se llama *Sistema Lineal Homogéneo* si y sólo si *B* es el vector nulo.

Definición 5

El sistema de ecuaciones lineales *AX=B* se llama *Sistema Lineal No Homogéneo* si y sólo si *B* es distinto del vector nulo.

Ejemplo

- El sistema lineal $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ -x + z + 2t = 0 \end{cases}$ es un sistema no homogéneo.

- El sistema lineal $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ es un sistema homogéneo.

Definición 6

Dado un sistema lineal no homogéneo *AX=B*, el sistema lineal homogéneo *AX=0* se llama *sistema lineal homogéneo asociado al sistema lineal dado*.

Ejemplo

Dado el sistema lineal no homogéneo

$$\begin{cases} 1x-2y+3z+\ \ 2w=1 \\ 2x+\ \ 4y+2z\qquad =-2 \\ -x\qquad\qquad\quad +2w=0 \end{cases}$$

el sistema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} 1x-2y+3z+\ \ 2w\ =0 \\ 2x+\ \ 4y+2z\qquad =0 \\ -x\qquad\qquad\quad +2w=0 \end{cases}$$

Conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales

Sea un sistema de ecuaciones lineales $AX=B$, con $A\in F^{mxn}$, $B\in F^{mx1}$.

Definición 7

$\overline{X}\in F^{nx1}$ es una ***solución*** del sistema lineal $AX=B$, si y sólo si verifica la ecuación matricial $AX=B$, es decir:

$\overline{X}\in F^{nx1}$ es una solución del sistema lineal $AX=B \Leftrightarrow A\overline{X}=B$

Notas

- Si $\overline{X}$ es una solución del sistema $AX=B$, entonces las componentes del vector columna $\overline{X}$ satisfacen cada una de las m ecuaciones lineales del sistema.
- El vector nulo de F^{nx1} es siempre solución del sistema lineal homogéneo $AX=0$, con $A\in F^{mxn}$ y se llama solución trivial.

Definición 8

Se llama *conjunto solución*, y se denota con S_B, al conjunto de todas las soluciones del sistema dado.
Esto es

$$S_B=\left\{X\in F^{nx1}\,/\,AX=B\right\}.$$

luego,

$$\overline{X}\in S_B \Leftrightarrow A\overline{X}=B.$$

Nota

Resolver un sistema lineal $AX=B$, significa determinar el conjunto solución S_B.

Sistemas de ecuaciones lineales compatibles – Sistemas de ecuaciones lineales incompatibles

Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$, con $A\in F^{mxn}$, $B\in F^{mx1}$ y sea S_B su conjunto solución.

Definición 9
$AX=B$ es *compatible* $\Leftrightarrow S_B \neq \emptyset$, es decir $AX=B$ tiene al menos una solución.

Nota
Todo sistema homogéneo es compatible, pues tiene la solución trivial.

Definición 10
$AX=B$ es *compatible determinado* $\Leftrightarrow$ el conjunto solución S_B tiene un único elemento, es decir $AX=B$ tiene solución única.

Definición 11
$AX=B$ es *compatible indeterminado* $\Leftrightarrow$ el conjunto solución S_B tiene más de un elemento, es decir $AX=B$ tiene más de una solución.

Definición 12
$AX=B$ es *incompatible* $\Leftrightarrow S_B = \emptyset$, es decir $AX=B$ no tiene solución.

Matriz ampliada

Definición 13
Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$, con $A\in F^{mxn}$, $B\in F^{mx1}$. Es decir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Se llama *Matriz ampliada de A*, a la matriz de $F^{m\times(n+1)}$ cuyas primeras n columnas son las columnas de A y la última columna es B, esto es

$$A^a = \left[A|B\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Nota
En la matriz ampliada se suele trazar una línea vertical que separa las columnas de la matriz de coeficientes de la columna de términos independientes, es decir

$$A^a = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ejemplo

Dado el sistema lineal
$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ -2x + y + 2z = 7 \\ y - t = 0 \end{cases},$$

la matriz ampliada es
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Sean $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{m \times 1}$.
El sistema de ecuaciones lineales *AX=B,* es compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes *A* es igual al rango de la matriz ampliada A^a.

En símbolos
$$AX=B \text{ es } compatible \Leftrightarrow rg(A) = rg(A^a)$$

Corolario

Sea *AX=B,* con $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{m \times 1}$ un sistema de ecuaciones lineales compatible

- *AX=B* es *compatible determinado,* si $rg(A) = rg(A^a) = r = n.$
- *AX=B* es *compatible indeterminado,* si $rg(A) = rg(A^a) = r < n.$

Consecuencia inmediata del teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema de ecuaciones lineales es incompatible si y solo si los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son distintos.

En símbolos
$$AX=B \text{ es } incompatible \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(A^a).$$

Notas

- El teorema de Rouché-Frobenius permite determinar la compatibilidad o incompatibilidad de un sistema lineal con tan solo comparar el rango de la matriz de coeficientes con el rango de la matriz ampliada y sin necesidad de resolver el sistema. En forma análoga el corolario suministra la condición que debe verificar un sistema lineal compatible para tener solución única o más de una solución.

- En todos los sistemas homogéneos se verifica que el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. Además, si el rango de la matriz es igual al número de incógnitas, la única solución es la trivial; y si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas, además de la solución trivial existen otras soluciones no triviales.

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Definición 14
Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si sus matrices ampliadas son equivalentes por filas.

Teorema

Si dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, entonces admiten el mismo conjunto solución.

Demostración

Sean $AX=B$ y $A'X=B'$ dos sistemas lineales equivalentes, tales que $A, A' \in F^{m\times n}$ y $B, B' \in F^{m\times 1}$.

Por definición se tiene que sus matrices ampliadas $\left[A|B\right]$ y $\left[A'|B'\right]$ son equivalentes, es decir, existe una sucesión finita de operaciones elementales de filas que transforma la matriz ampliada $\left[A|B\right]$ en la matriz ampliada $\left[A'|B'\right]$.

Basta demostrar que la matriz ampliada $\left[A'|B'\right]$ se obtiene de la matriz ampliada $\left[A|B\right]$ por medio de una sola operación elemental de filas, para comprobar que los conjuntos soluciones son iguales.

En efecto, supongamos que la matriz ampliada $\left[A'|B'\right]$ se obtuvo de la matriz ampliada $\left[A|B\right]$ por la operación elemental $f_r + kf_i$

$$\left[A|B\right]=\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$$\left[A'|B'\right]=\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}+ka_{i1} & a_{r2}+ka_{i2} & \cdots & a_{rj}+ka_{ij} & \cdots & a_{rn}+ka_{in} & b_r+kb_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

El sistema A'X=*B*' se expresa como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \left(a_{r1}+ka_{i1}\right)x_1 + \left(a_{r2}+ka_{i2}\right)x_2 + \dots + \left(a_{rj}+ka_{ij}\right)x_j + \dots + \left(a_{rn}+ka_{in}\right)x_n = b_r+kb_i \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O bien,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \left(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rj}x_j + \dots + a_{rn}x_n\right) + k\left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n\right) = b_r + kb_i \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si $\overline{X}$ es una solución del sistema *A’X=B’* entonces es evidente que $\overline{X}$ es también solución del sistema *AX=B*, con lo que:

$$S_{B'} \subset S_B \qquad \text{(a)}$$

Recíprocamente, si $\overline{X}$ es una solución del sistema lineal *AX=B*, entonces $\overline{X}$ es solución del sistema *A’X=B’*, con lo que:

$$S_B \subset S_{B'} \qquad \text{(b)}$$

De (a) y (b) se concluye que ambos sistemas lineales tienen el mismo conjunto solución, es decir:

$$S_B = S_{B'}$$

La demostración es trivial para el caso en que el sistema lineal *A’X=B’* no tiene solución.

En forma análoga se prueba para los dos tipos restantes de operaciones elementales.

Q.E.D.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un método básico para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales es transformar el sistema lineal dado en otro sistema lineal que tenga el mismo conjunto solución y que se pueda resolver en forma más sencilla.

Eliminación Gaussiana

Sea el sistema lineal $AX=B$, con $A \in F^{m\times n}$ y $B \in F^{m\times 1}$.
El método de *Eliminación Gaussiana* es un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales, que consiste en transformar la matriz ampliada de un sistema lineal en una matriz escalón por filas, la que da origen a un nuevo sistema lineal $A'X=B'$ que tiene el mismo conjunto solución que el dado, con la ventaja que la incompatibilidad es evidente (los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son diferentes), o bien, la o las soluciones se obtienen en forma inmediata utilizándose la técnica llamada *Sustitución hacia atrás*.

En efecto para el sistema dado $AX=B$, con $A \in F^{m\times n}$ y $B \in F^{m\times 1}$, si a partir de la matriz ampliada $\left[A\middle|B\right]$, mediante operaciones elementales de filas se obtiene una matriz escalón por filas $\left[A'\middle|B'\right]$, por definición 14 los sistemas $AX=B$ y $A'X=B$ son equivalentes y por el teorema precedente ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

En el sistema $A'X=B'$, con $A' \in F^{m\times n}$ y $B' \in F^{m\times 1}$, las *ecuaciones principales* son las formadas con los elementos de las filas no nulas de la matriz A', y

- En cada ecuación principal, la *incógnita principal* es aquella cuyo coeficiente es el 1 principal. Cada una de las incógnitas principales puede encontrarse en ecuaciones precedentes pero sus coeficientes no son 1 principales.
- En cada ecuación principal, además de las incógnitas principales, pueden existir otras incógnitas llamadas *incógnitas no principales o secundarias*, éstas se distinguen en las ecuaciones una vez que se detectan todas las incógnitas principales.

Sus pasos son:

I. Transformar la matriz ampliada del sistema $A^a=\left[A\middle|B\right]$, aplicando operaciones elementales de filas, en una matriz escalón por filas $A'^a=\left[A'\middle|B'\right]$.

$$AX=B$$
$$\downarrow$$
$$A^a=\left[A\middle|B\right]$$
$$\vdots \qquad \text{Operaciones elementales de fila.}$$
$$A'^a=\left[A'\middle|B'\right]$$
$$\downarrow$$
$$A'X=B'$$

Por definición los sistemas $AX=B$ y $A'X=B'$ son equivalentes y por el teorema precedente ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

II. Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius y analizar los rangos de A y A^a y el número de incógnitas del sistema.

- Si $rg(A') \neq rg(A'^a)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ es *incompatible*, por lo tanto $S_B = \varnothing$.
- Si $rg(A') = rg(A'^a) = n$ (n es el número de incógnitas), entonces el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es *compatible determinado* y se emplea la técnica de sustitución hacia atrás, según la cual se tiene:
  - n ecuaciones principales del sistema $A'X=B'$, en donde los "1s principales" son coeficientes de las incógnitas principales.
  - De cada ecuación principal se despeja la incógnita principal.
  - Luego desde abajo hacia arriba se sustituyen los valores de las incógnitas que se van obteniendo.

- Si $rg(A') = rg(A'^a) = r < n$ (n es el número de incógnitas), entonces el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es *compatible indeterminado* y se emplea la técnica de sustitución hacia atrás, según la cual se tiene:

  - r ecuaciones principales del sistema $A'X=B'$, y por consiguiente tiene r "1s principales" que son coeficientes de las r incógnitas principales y las restantes n-r incógnitas son las incógnitas secundarias o no principales.
  - De cada ecuación principal se despeja la incógnita principal, que puede o no quedar en función de las incógnitas principales de las otras ecuaciones principales y/o de las n-r incógnitas secundarias.
  - Luego desde abajo hacia arriba se sustituyen los valores de las incógnitas que se van obteniendo.

  Si se desea encontrar una solución particular del sistema basta asignar escalares arbitrarios del cuerpo F a las n-r incógnitas no principales.

<u>*Ejemplo*</u>

Supóngase que la siguiente matriz escalón por filas es la matriz ampliada que resultó de efectuar operaciones elementales de filas a la matriz ampliada de un sistema dado:

$$A'^a = \left[A' \middle| B'\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

se tiene que

$$rg(A') = rg(A'^a) = 3 < 4$$

por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es compatible indeterminado y se expresa como

$$\begin{cases} x-5y+2z-4t=5 \\ \quad y+6t=2 \\ \quad z-2t=-1 \end{cases}$$

Despejando las incógnitas principales:

$$\begin{cases} x=5y-2z+4t+5 \\ y=-6t+2 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

luego

- $z=2t-1, t\in R$
- $y=-6t+2, t\in R$
- $x=5(-6t+2)-2(2t-1)+4t+5=-30t+10-4t+2+4t+5=$
  $=-30t+17, t\in R$

Finalmente el conjunto solución es

$$S_{B'}=\{(x,y,z,t)/\, x=-30t+17 \wedge y=-6t+2 \wedge z=2t-1 \wedge t\in R\}$$

$$S_{B'}=\{(-30t+17,-6t+2,2t-1,t)/\, t\in R\}$$

$$S_{B'}=\left\{\begin{bmatrix} -30t+17 \\ -6t+2 \\ 2t-1 \\ t \end{bmatrix} / \, t\in R\right\}$$

<u>Método de Gauss-Jordan</u>

Sea el sistema lineal *AX=B*, con $A\in F^{m\times n}$ y $B\in F^{m\times 1}$
El método de *Gauss-Jordan* es un procedimiento sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales, que consiste en transformar la matriz ampliada de un sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, en una matriz cuyas primeras *n* columnas forman una matriz escalón reducida por filas, la que da origen a un nuevo sistema lineal *A'X=B'*, más fácil de resolver y que tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal dado.

En el sistema *A'X=B'*, con $A'\in F^{m\times n}$ y $B'\in F^{m\times 1}$, a diferencia del método de eliminación Gaussiana, las *incógnitas principales* aparecen sólo en la correspondiente ecuación principal.

I. Transformar la matriz ampliada del sistema $A^a=\left[A\,|\,B\right]$, aplicando operaciones elementales de filas, en una matriz escalón reducida por filas $A'^a=\left[A'\,|\,B'\right]$.

$$\begin{gathered} AX=B \\ \downarrow \end{gathered}$$

$$A^a = \left[A | B \right]$$
$\vdots$ Operaciones elementales de fila.
$$A'^a = \left[A' | B' \right]$$
$$\downarrow$$
$$A'X=B'$$

Por definición los sistemas $AX=B$ y $A'X=B'$ son equivalentes y por el teorema precedente ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

I. Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius y analizar los rangos de A^a y A^a y el número de incógnitas del sistema.

- Si $rg(A') \neq rg(A'^a)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es *incompatible*, por lo tanto $S_B = \emptyset$.
- Si $rg(A') = rg(A'^a) = n$ (n es el número de incógnitas), entonces el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es *compatible determinado* y se tiene:
  - n ecuaciones principales del sistema $A'X=B'$, en donde los "1s principales" son coeficientes de las incógnitas principales.
- Si $rg(A') = rg(A'^a) = r < n$ (n es el número de incógnitas), entonces el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es *compatible indeterminado* y se tiene:

  - r ecuaciones principales del sistema $A'X=B'$, y por consiguiente tiene r "1s principales" que son coeficientes de las r incógnitas principales y las restantes n-r incógnitas son las incógnitas secundarias o no principales.
  - De cada ecuación principal se despeja la incógnita principal, que puede o no quedar en función de las n-r incógnitas secundarias.

  Si se desea encontrar una solución particular del sistema basta asignar escalares arbitrarios del cuerpo F a las n-r incógnitas no principales.

<u>*Ejemplo*</u>

Supóngase que la siguiente matriz escalón por filas es la matriz ampliada que resultó de efectuar operaciones elementales de filas a la matriz ampliada de un sistema dado:

$$A'^a = \left[A' | B' \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Se tiene que:

$$rg(A') = rg(A'^a) = 3 < 4$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales $A'X=B'$ es compatible indeterminado y se expresa como

$$\begin{cases} x+30t=17 \\ y+6t=2 \\ z-2t=-1 \end{cases}$$

Despejando las incógnitas principales

$$\begin{cases} x=17-30t \\ y=2-6t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

Finalmente el conjunto solución es:

$$S_{B'}=\{(x,y,z,t)\,/\,x=17-30t\ \wedge\ y=2-6t\ \wedge\ z=-1+2t\ \wedge\ t\in R\}$$

$$S_{B'}=\{(17-30t, 2-6t, -1+2t, t)/t\in R\}$$

$$S_{B'}=\left\{\begin{bmatrix} 17-30t \\ 2-6t \\ -1+2t \\ t \end{bmatrix}/t\in R\right\}.$$

<u>Teorema de Cramer</u>

Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$, con $A\in F^{n\times n}$ y $B\in F^{n\times 1}$.
Si A es inversible entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$, admite una única solución, es decir es compatible determinado.

<u>Demostración</u>

Sea $AX=B$, como A es inversible por hipótesis, existe A^{-1} (Inversa de A).
Premultiplicando por A^{-1} en ambos miembros:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

por propiedad asociativa

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \underset{(1)}{\Rightarrow} I_nX = A^{-1}B \underset{(2)}{\Rightarrow} X = A^{-1}B.$$

<u>Referencias:</u>
(1) A^{-1} es la inversa de A.
(2) I_n es la unidad del producto de matrices.

- Es solución del sistema $AX=B$.
  En efecto:

$$A(A^{-1}B) \underset{(1)}{=} (AA^{-1})B \underset{(2)}{=} I_nB \underset{(3)}{=} B.$$

  Referencias:
  (1) Por asociatividad.
  (2) A^{-1} es la inversa de A.
  (3) I_n es la unidad del producto de matrices.

- Es única.
  En efecto, $X=A^{-1}B$ es única solución debido a la unicidad de la inversa.

Q.E.D.

Regla de Cramer

Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$, con $A\in F^{n\times n}$ y $B\in F^{n\times 1}$.
Si $D(A)\neq 0$ entonces el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado y el valor de cada componente del vector solución:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

se obtiene del siguiente modo:

$$\forall j=1,\ldots,n:\ x_j=\frac{D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{j-1} & B & c_{j+1} & \ldots & c_1 \end{pmatrix}}{D(A)}$$

Demostración:

Como $D(A)\neq 0$ entonces A es inversible, y por el teorema de Cramer:

$$\exists!\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} / AX=B$$

entonces:

$$\exists!\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in F:\sum_{i=1}^{n} x_ic_i=B.$$

donde c_i son las columnas de A.

Es decir B es combinación lineal de las columnas de A.

Calculando:

$$D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & B & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(1)}{=} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i c_i & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & x_1 c_1 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & x_2 c_2 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & x_{j-1} c_{j-1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & x_j c_j & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & x_{j+1} c_{j+1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & x_n c_n & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(3)}{=} x_1 D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_1 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ x_2 D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_2 & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ x_{j-1} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_{j-1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} +$$

$$+ x_j \underbrace{D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_j & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix}}_{=D(A)} +$$

$$+ x_{j+1} D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_{j+1} & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ x_n D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & c_n & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(4)}{=} 0 + 0 + \dots + 0 + x_j D(A) + 0 + \dots + 0 = x_j D(A)$$

Se ha probado que

$$D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & B & c_{j+1} & \dots & c_n \end{pmatrix} = x_j \underbrace{D(A)}_{\neq 0} \cdot$$

luego:

$$x_j = \frac{D\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{j-1} & B & c_{j+1} & \dots & c_1 \end{pmatrix}}{D(A)}$$

Referencias:

(1) Reemplazando B por $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i$.
(2) Por Ax.$_1$ de determinante.
(3) Por Ax.$_2$ de determinante.
(4) Por Ax.$_3$ de determinante.

Q.E.D.