ÁLGEBRA LINEAL

Ingenierías

ÁLGEBRA II

LM - PM

Unidad Nº 3

Espacios Vectoriales

FCEyT - UNSE

Unidad Nº 3:

1.- ESPACIOS VECTORIALES

Definición 1

Sean A $\neq \varnothing$ y K $\neq \varnothing$, * es una *Ley de Composición Externa* (L.C.E.) en A con operadores en K si y sólo si * es una función con dominio en el producto cartesiano $K \times A$ y toma valores en A, en símbolos

$$\begin{aligned} *: K \times A &\to A \\ (\alpha, a) &\mapsto \alpha * a \end{aligned}$$

Otra forma de expresar que * es una L.C.E es: $\alpha \in K, a \in A \;\Rightarrow\; \alpha a \in A$

Definición 2

Sean V un conjunto no vacío de elementos llamados vectores, (F, +, ·) un cuerpo cuyos elementos se llaman escalares y dos operaciones llamadas suma de vectores y la multiplicación por escalares (es decir multiplicación de escalar por vector) representadas por + y · respectivamente.

La terna (V, +, ·) es un espacio vectorial sobre un cuerpo (F, +, ·) si y sólo si se verifican los siguientes axiomas:

V1. (V, +) es grupo abeliano, es decir:

a) $\forall\, u, v \in V;\; u + v \in V$ (+ es LCI en V)

b) $\forall\, u, v, w \in V;\; (u+v)+w = u+(v+w)$ (+ es asociativa)

c) $\exists\, 0_V \in V : \forall\, u \in V;\; u + 0_V = 0_V + u = u$ (0v es elemento neutro)

d) $\forall\, u \in V,\; \exists -u \in V : u + (-u) = (-u) + u = 0_V$ (-u es el opuesto de u)

e) $\forall\, u, v \in V;\; u + v = v + u$ (+ es conmutativa)

V2. $\forall\, a \in F,\; \forall\, u \in V;\; au \in V$ (· es LCE en V con escalares en F)

V3. $\forall\, a \in F,\; \forall\, u, v \in V;\; a(u+v) = au + av$ (· es distributiva respecto a la suma de vectores)

V4. $\forall\, a, b \in F,\; \forall\, u \in V;\; (a+b)\,u = au + bu$ (· es distributiva respecto a la suma de escalares)

V5. $\forall\, a, b \in F, \forall\, u \in V;\; a(bu) = (ab)u$ (asociatividad de la multiplicación por escalares)

V6. $\forall\, u \in V;\; 1\,u = u$ (1 es la unidad del cuerpo F)

Notas

Si (V, +, ·) es un espacio vectorial sobre un cuerpo (F, +, ·),

1.- Se expresa simplemente diciendo *"V es un espacio vectorial definido sobre un cuerpo F"*, y para simplificar la notación se escribe "V_F"

2.- Los vectores de V se suelen designar con las últimas letras del abecedario (ej. *u, v, w).*

3.- Los escalares del cuerpo F usualmente se designan con las primeras letras del abecedario (ej. *a*, *b*, *c*), o las primeras letras del alfabeto griego (ej. α, β, γ).

4.- La suma de vectores es una ley de composición interna en V, esto es

$$\begin{aligned} +: V \times V &\to V \\ (u, v) &\mapsto u+v \end{aligned}$$

5.- La multiplicación por escalares es una ley de composición externa en V con escalares en el cuerpo F.

$$\begin{aligned} \cdot : F \times V &\to V \\ (a, u) &\mapsto au \end{aligned}$$

A esta ley también se le denomina "***producto por escalares***" o ***"producto de un escalar por un vector"***

6.- Si bien tanto la ley de composición interna en V como la ley de composición interna en F se simbolizan con +, éstas representan operaciones diferentes en general.

<u>Ejemplos</u>

a) El conjunto $\boldsymbol{R^2}$ de vectores del plano cartesiano, representados por los pares ordenados de números reales, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales (***R***, +, ·). Donde la suma de vectores del plano real viene dada por

$$\begin{aligned} +: R^2 \times R^2 &\to R^2 \\ (u, v) &\mapsto u+v \end{aligned}$$

donde $u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2) \in R^2$ y $u+v \overset{def}{=} (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \in R^2$.

y el producto de un número real por un vector del plano real está definido por:

$$\begin{aligned} \cdot : R \times R^2 &\to R^2 \\ (a, u) &\mapsto au \end{aligned}$$

en donde, $a \in R, u = (x, y) \in R^2$ y $au \overset{def}{=} (ax, ay) \in R^2$.

Interpretación geométrica de la suma y de la resta en el espacio vectorial R_R^2

Geométricamente, cada par ordenado de números reales (*x*, *y*) se puede interpretar como un punto del plano cartesiano $R \times R$, y también como un vector cuyo origen es el origen de coordenadas y su extremo el punto (*x*, *y*).

Por lo tanto la suma de dos vectores $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ de R^2, viene definido por el vector $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, el cuál geométricamente representa la diagonal del paralelogramo de lados *u* y *v* que contiene al origen de ambos vectores, como se puede observar en la *Figura 1*.

Con respecto a la resta de vectores, en todo grupo está definida por

$$u – v = u + (-v).$$

En esta situación, como $u=(x_1,\ y_1)$ y $v=\ (x_2,y_2)$, y el opuesto de v es $-v=(-x_2,-y_2)$, se tiene

$$u-v=u+(-v)=(x_1,\ y_1)+(-x_2,-y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2)$$

Así, la diagonal del paralelogramo de lados *u* y *v* que une los extremos de ambos vectores, representa al vector libre *u – v* con origen en el extremo del vector *v* y extremo en el extremo del vector *u*, como se puede observar en la *Figura 1*.

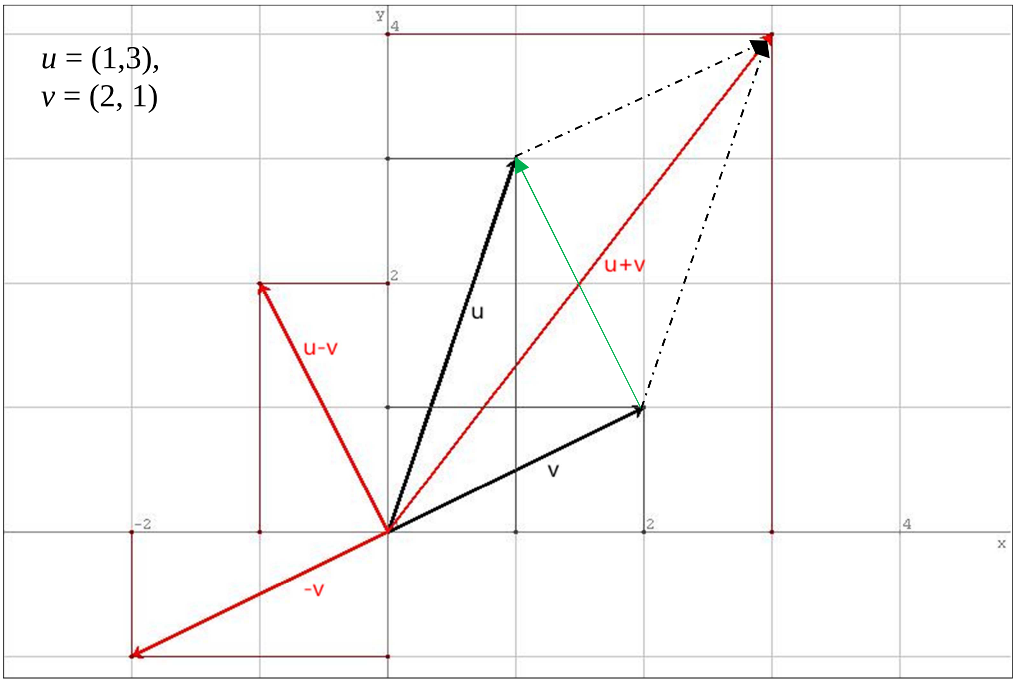


Figura 1

Interpretación geométrica de producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar $a\in\ R$, por un vector $u=(x,\ y)\ \in\ R^2$ viene dado por el vector $au\ =\ (ax,ay)\in\ R^2$.

El vector *au* tiene distintas características según sea el valor del escalar *a*. En la *Tabla 1*, se describe el comportamiento del vector *au* para los posibles valores de *a*.

	au
$a = 0$	es igual al vector nulo (0,0)
$a = 1$	es igual al vector *u*
$0 < a < 1$	igual sentido y dirección de *u*, pero de menor longitud que *u*
$a > 1$	igual sentido y dirección de *u*, pero de mayor longitud que *u*

$-1 < a < 0$	igual dirección, pero sentido contrario a *u* y menor longitud que *u*
$a < -1$	igual dirección, pero sentido contrario a *u* y mayor longitud que *u*

Tabla 1

Ejemplo Los vectores $v = (2, 1)$, $2v = (4, 2)$ y $-\frac{1}{2}v = (-1, -\frac{1}{2})$ se pueden visualizar geométricamente en la *Figura 2*

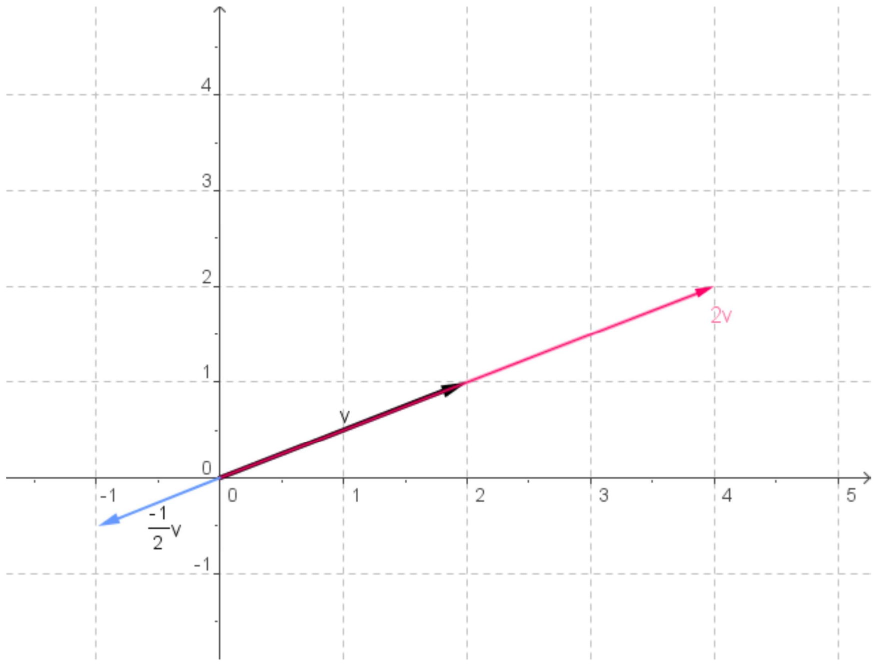


Figura 2

b) El conjunto $R^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in R\}$ de vectores del espacio, representados por los ternas ordenadas de números reales, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $(R, +, \cdot)$.

La suma de vectores de R^3 es una ley de composición interna dada por

$$+: \ R^3 \times R^3 \to R^3$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$

en donde $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2) \in R^3$ y la suma de *u* y *v* está definida por

$$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \overset{def}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

y el producto de un escalar real por un vector de R^3 es una ley de composición externa con escalares en el cuerpo de los números reales dada por

$$\cdot: \ R \times R^3 \to R^3$$
$$(a, u) \mapsto au$$

En donde $u = (x, y, z) \in R^3$ y el producto de un escalar $a \in R$ y el vector *u* está definida por

$$au = a(x, y, z) \overset{def}{=} (ax, ay, az)$$

Nota

En la *Figura 3* se muestra la representación de un vector $u = (a_1, b_1, c_1) \in R^3$

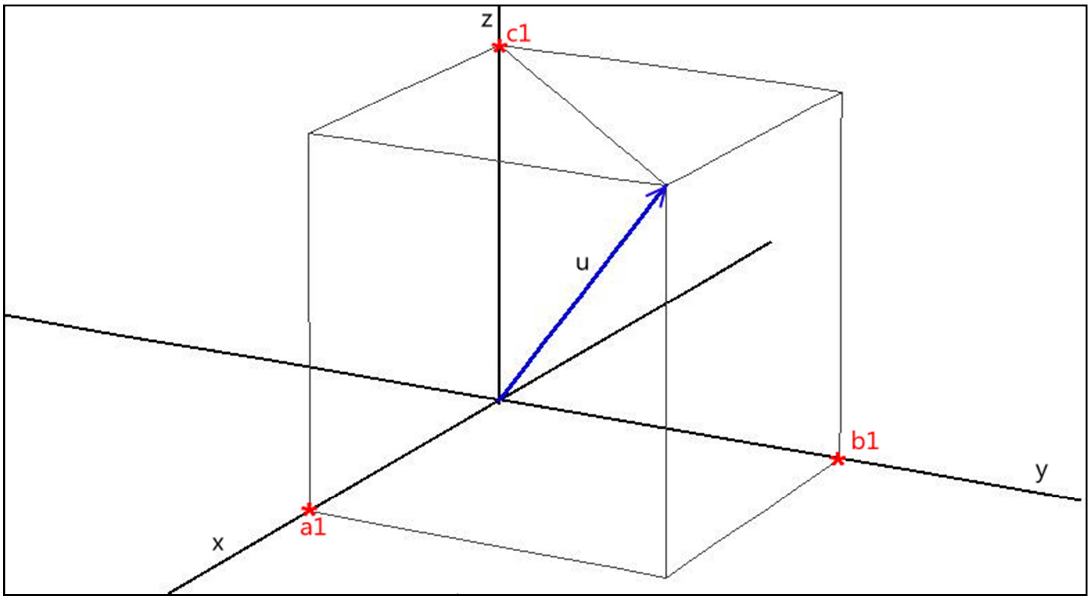


Figura 3

c) En general, para $n \in N$, el conjunto R^n de las n-uplas ordenadas de números reales es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $(R, +, \cdot)$ con la suma de n-uplas y el producto de un número real por una n-upla.
En Símbolos:

$$R^n_R = \underbrace{R \times R \times R \times \ldots \times R}_{n\ \ veces\ R} = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) / a_i \in R, \forall i = 1,\ \ 2,\ \ \ldots\ ,\ n \right\}$$

La suma de n-uplas es una ley de composición interna

$$\begin{aligned} + :\ \ & R^n \text{ x } R^n \to R^n \\ & (u, v) \mapsto u + v \end{aligned}$$

definida del siguiente modo,

si $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$, $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R^n$, se define

$$u + v \ \ = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{def}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

El producto de un escalar por una n-upla es una ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot :\ \ & R \times R^n \to R^n \\ & (\alpha,\ u) \mapsto \alpha\, u \end{aligned}$$

definida como sigue

si $\alpha \in R,\ u=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in R,\quad \alpha\, u=\alpha\ (a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)\overset{def}{=}(\alpha\ a_1,\ \alpha\ a_2,\ \dots\ ,\ \alpha\ a_n)$

Observación

Es claro que para n = 1, $\boldsymbol{R_R}$ es un espacio vectorial, es el espacio vectorial del conjunto de los reales sobre el cuerpo de los números reales. Geométricamente los vectores de este espacio vectorial se representan en la recta real.

d) El conjunto $R^{m\times n}$ de las matrices reales que tienen m filas y n columnas es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales (R, +, ·) con la suma de matrices y la multiplicación de un número real por una matriz. En símbolos:

La suma de matrices es una ley de composición interna en $R^{m\times n}$ esto es,

$$\begin{aligned} +:\quad & R^{m\times n}\times R^{m\times n}\to R^{m\times n} \\ & (A,B)\ \mapsto\ A+B \end{aligned},$$

definida del siguiente modo,

si $A=[a_{ij}]\ ,\ B=[b_{ij}]\ \in\ R^{m\times n}\ ,\quad A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]\overset{def}{=}[a_{ij}+b_{ij}]$

La multiplicación de un escalar real por una matriz es ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot:\quad & R\times R^{m\times n}\to R^{m\times n} \\ & (\alpha, A)\ \mapsto\ \alpha A \end{aligned},$$

definida por

si $\alpha\in R,\ A=[a_{ij}]\in R^{m\times n}$, se define $\quad \alpha\ A=\alpha[a_{ij}]\ \overset{def}{=}\ [\alpha\ a_{ij}]$

e) Sea F un cuerpo y sea X un conjunto no vacío. Sea el conjunto F^X formado por las funciones con dominio X y con valores en F, esto es

$$F^X = \{f /\ f: X\to F\}$$

Las siguientes operaciones definen sobre F^X una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo (F, +, ·)

Suma: $\quad f,g\in F^X\ \Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall\ x\in X$

Producto: $\quad a\in F\ \wedge\ f\in F^X\ \Rightarrow\ (a\,f)(x)=a\,f(x),\quad \forall\ x\in X$

Es claro que la suma y el producto están bien definidos, ya que

$$f,g\in F^X \Rightarrow\ f+g\in F^X$$

$$a\in F\wedge\ f\in F^X\Rightarrow a\,f\in F^X$$

Es decir que la suma es una ley de composición interna en F^X, y que el producto es ley de composición externa en F^X con escalares en el cuerpo F.

Es fácil mostrar que efectivamente el conjunto F^X con estas operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo $(F, +, \cdot)$

PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F

Proposición 1

El escalar $0 \in$ F, multiplicado por cualquier vector de V es igual al vector nulo de V. En símbolos,

$$\forall\, u \in V\ ;\ 0\, u = 0_V$$

Demostración

Sean $\alpha \in F$ y $u \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha\, u &= (\alpha + 0)u && (1) \\ \alpha\, u &= \alpha\, u + 0\, u && (2) \\ \alpha\, u + 0_V &= \alpha\, u + 0\, u && (3) \\ 0_V &= 0\, u && (4) \end{aligned}$$

Referencias:

(1) El 0 es elemento neutro aditivo en el cuerpo F.

(2) Por Axioma V4 de espacio vectorial.

(3) El vector nulo 0_V es el elemento neutro aditivo en el espacio vectorial V.

(4) Vale la ley cancelativa en el grupo abeliano $(V, +)$.

Proposición 2

Cualquier escalar del cuerpo F multiplicado por el vector nulo de V es igual al vector nulo de V. En símbolos,

$$\forall\, \alpha \in \mathrm{F}\ ;\ \alpha\, 0_V = 0_V$$

Demostración

Sean $\alpha \in F$ y $0_V \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha\, u &= \alpha\, (u + 0_V) && (1) \\ \alpha\, u &= \alpha\, u + \alpha\, 0_V && (2) \\ \alpha\, u + 0_V &= \alpha\, u + \alpha\, 0_V && (3) \\ 0_V &= \alpha\, 0_V && (4) \end{aligned}$$

Referencias:

(1) El vector nulo 0_V es elemento neutro aditivo en el espacio vectorial V.

(2) Por axioma V3 de espacios vectoriales.

(3) El vector nulo 0_V es el elemento neutro aditivo en V.

(4) Vale la ley cancelativa en el grupo abeliano $(V, +)$

Proposición 3

Cualesquiera sean $\alpha \in$ F y $u \in$ V, se verifica

$$(-\alpha)\,u = \alpha\,(-u) = -(\alpha\,u)$$

Demostración

i) Sean $\alpha \in F$ y $u \in V$, entonces

$\alpha u \in V$, luego por ser (V, +) un grupo se tiene $-(\alpha u) \in V$ y se verifica

$$\alpha u + [-(\alpha u)] = [-(\alpha u)] + \alpha u = 0_V \qquad \text{(I)}$$

Además

$$\alpha u + (-\alpha)\,u \underset{(1)}{=} (\alpha + (-\alpha))\,u \underset{(2)}{=} 0\,u \underset{(3)}{=} 0_V \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) resulta

$$\alpha u + (-\alpha)\,u = \alpha u + [-(\alpha u)]$$

y por la ley cancelativa en el grupo (V, +) es,

$$(-\alpha)\,u = -(\alpha u)$$

Referencias:

(1) Por el axioma V4 de espacio vectorial.

(2) En el grupo abeliano (F,+), un elemento más su opuesto es igual al escalar cero.

(3) Por Proposición 1.

ii) Sean $\alpha \in F$ y $u \in V$, entonces

$\alpha u \in V$, luego por ser (V, +) un grupo se tiene $-(\alpha u) \in V$ y se verifica

$$\alpha u + [-(\alpha u)] = [-(\alpha u)] + \alpha u = 0_V \qquad \text{(I)}$$

Además

$$\alpha u + \alpha(-u) \underset{(1)}{=} \alpha(u + (-u)) \underset{(2)}{=} \alpha 0_V \underset{(3)}{=} 0_V \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) resulta

$$\alpha u + \alpha(-u) = \alpha u + [-(\alpha u)]$$

Y por la ley cancelativa en el grupo (V, +) es,

$$\alpha(-u) = -(\alpha u)$$

Referencias:

(1) Por axioma V3 de espacio vectorial.

(2) En el grupo abeliano (V,+): un elemento más su opuesto es igual al vector nulo.

(3) Por Proposición 2.

Proposición 4

Cualquiera sea $u \in$ V se verifica $(-1)\,u = -u$

Demostración

Por proposición 3, si se toma $\alpha = -1$ se tiene $(-1)\,u = -(1\,u) = -u$

Proposición 5

Cualesquiera sean $\alpha \in$ F y u $\in$ V, se verifica que

$$\alpha\ u = 0_V \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \ \vee \ u = 0_V$$

Demostración

Sean $\alpha \in F$ y $u \in V$ tales que $\alpha\ u = 0_V \ \wedge \ \alpha \neq 0$, entonces

$$\alpha\ u = 0_V \underset{(1)}{\Rightarrow} \alpha^{-1}(\alpha\ u) = \alpha^{-1} 0_V \underset{(2)}{\Rightarrow} (\alpha^{-1}\alpha)\ u = 0_V \underset{(3)}{\Rightarrow} 1\ u = 0_V \underset{(4)}{\Rightarrow} u = 0_V$$

Referencias:

(1) Ya que $\alpha \neq 0$, existe α^{-1}. Se multiplica en ambos miembros por α^{-1}

(2) Por axioma V5 de espacio vectorial y por Proposición 2.

(3) En el grupo abeliano (F-{0}, ·), cada elemento por su inverso es igual a la unidad

(4) Por axioma V6 de espacio vectorial

Proposición 6

Cualesquiera sean $\alpha \in$ F y $u, v \in$ V, se verifica que

$$\alpha\ (u - v) = \alpha\ u - \alpha\ v\,.$$

Demostración

Sean $\alpha \in F$ y $u, v \in V$, entonces

$$\alpha\ (u - v) \underset{(1)}{=} \alpha(u + (-v)) \underset{(2)}{=} \alpha\ u + \alpha(-v) \underset{(3)}{=} \alpha\ u + (-(\alpha\ v)) \underset{(4)}{=} \alpha\ u - \alpha\ v$$

Referencias:

(1) Por definición de resta de vectores

(2) Por axioma V3 de espacio vectorial

(3) Por Proposición 3

(4) Por definición de resta de vectores

2. - SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 1

Sea V_F un espacio vectorial y sea S un subconjunto no vacío de V ($S \subset V \wedge S \neq \varnothing$). S es un subespacio vectorial de V si y sólo si S con la ley de composición interna + y la ley de composición externa · definidas en V pero restringidas a S es un espacio vectorial.

Ejemplos

Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2_{\boldsymbol{R}}$. Son subespacios vectoriales de $\boldsymbol{R}^2$:

- Los conjuntos {(0,0)} y $\boldsymbol{R}^2$.
- Toda recta que contiene al origen. Por ejemplo:
  - ✓ El eje OX, que viene representado analíticamente por

    $$S = 0\vec{X} = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, y = 0\right\}$$

- ✓ El eje OY, que viene representado analíticamente por $T = \vec{0Y} = \{(x, y) \in R^2 / x = 0\}$
- ✓ La primera bisectriz, que está representada analíticamente por

$$H = \{(x, y) \in R^2 / y = x\}$$

Notas

1.- Si S es un subespacio vectorial de V, se denotará $S \prec V$.

2.- Si S es un subespacio vectorial de V, los conjuntos $\{0_V\}$ y V son subespacios vectoriales *triviales* de V_F.

Proposición 1

Sea V_F un espacio vectorial y sea S un subconjunto no vacío de V. Son condiciones necesarias y suficientes para que S sea un subespacio vectorial de V, que S sea cerrado para suma de vectores y para el producto por escalares. En símbolos

$$S \prec V \Leftrightarrow \begin{cases} i) & u, v \in S \Rightarrow u + v \in S \\ ii) & \alpha \in F \wedge u \in S \Rightarrow \alpha\, u \in S \end{cases}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Las condiciones son necesarias.

$$S \prec V \Rightarrow \begin{cases} i) & u, v \in S \Rightarrow u + v \in S \\ ii) & \alpha \in F \wedge u \in S \Rightarrow \alpha\, u \in S \end{cases}$$

Por hipótesis S es subespacio vectorial de V, entonces por Definición1 resulta que S es un espacio vectorial. Por lo tanto

1) la suma es ley de composición interna en S, es decir que se verifica *i*).
2) el producto por escalares es ley de composición externa en S con escalares en F, por lo tanto se verifica *ii*).

$\Leftarrow$) Las condiciones son suficientes.

Hipótesis $\begin{cases} V \quad \text{espacio vectorial} \\ S \subset V \\ S \neq \varnothing \\ i) \quad u, v \in S \Rightarrow u + v \in S \\ ii) \quad \alpha \in F \wedge u \in S \Rightarrow \alpha\, u \in S \end{cases}$

$$\underline{Tesis}: \quad S \prec V \quad \equiv \begin{cases} 1)\ S \subset V \\ 2)\ S \neq \varnothing \\ 3)\ (S,+)\ es\ grupo\ abeliano \\ 4)\ \forall\ a \in F,\ \forall\ u \in S;\ au \in S \\ 5)\ \forall\ a \in F,\ \forall\ u,\ v \in S;\ a(u+v) = au+av \\ 6)\ \forall\ a,\ b \in F, \forall\ u \in S;\ (a+b)\ u = au+bu \\ 7)\ \forall\ a,\ b \in F, \forall\ u \in S;\ a(bu) = (ab)u \\ 8)\ \forall\ u \in S;\ 1\,u = u \end{cases}$$

En efecto

1) $S \subset V$, por hipótesis
2) $S \neq \varnothing$, por hipótesis
3) (S, +) es grupo abeliano. En efecto
   - La condición *i)* nos indica que + es ley de composición interna en *S*.
   - + es asociativa, ya que se verifica *por herencia* puesto que $S \subset V$.
   - $\exists\ 0_V \in S\ : \forall\ u \in S;\ u + 0_V = 0_V + u = u$

     En efecto, por hipótesis *ii)*

     $$\alpha \in F \wedge u \in S \Rightarrow \alpha\ u \in S\ ,$$

     entonces para $\alpha = 0\ \wedge\ u \in S$ se tiene

     $$0\ u \in S \underset{\text{Prop1 de Esp Vect}}{\Rightarrow} 0_V \in S\ .$$

   - $\forall\ u \in S; \exists -u \in S : u + (-u) = (-u) + u = 0_V$

     Por hipótesis *ii*)

     $$\alpha \in F \wedge u \in S \Rightarrow \alpha\ u \in S$$

     Luego tomando $\alpha = -1\ \wedge\ u \in S$, resulta

     $$(-1)\ u \in\ S \underset{\text{Prop 4 EspVect}}{\Rightarrow} -u \in S\ .$$

   - + es conmutativa en *S*. Se verifica *por herencia*, pues $S \subset V$.

4), 5), 6), 7) y 8) se verifican *por herencia*, pues $S \subset V$.

Q.E.D.

OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES

Proposición 2

Sea V_F un espacio vectorial y sean S_1 , S_2 dos subespacios vectoriales de V entonces $S_1 \cap S_2$ es también un subespacio vectorial de V.

<u>*Demostración*</u>

Por definición,

$$S_1 \cap S_2 \overset{def}{=} \{\, v \in V \;/\; v \in S_1 \;\wedge\; v \in S_2 \}$$

Este conjunto es un subespacio vectorial de *V*, en efecto,

1. $S_1 \cap S_2 \subset V$ por definición de $S_1 \cap S_2$.

2. $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \prec V \;\Rightarrow\; 0_V \in S_1 \\ S_2 \prec V \;\Rightarrow\; 0_V \in S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 0_V \in S_1 \cap S_2$$

3. $u, v \in S_1 \cap S_2 \;\Rightarrow\; u + v \in S_1 \cap S_2$

   En efecto,

$$u,\; v \;\in\; S_1 \cap S_2 \;\underset{(1)}{\Rightarrow}\; u, v \in S_1 \;\wedge\; u,\; v \;\in\; S_2 \;\underset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow}\; u+v \;\in\; S_1 \;\wedge\; u+v \;\in\; S_2 \;\underset{(3)}{\Rightarrow}\; u+v \;\in\; S_1 \cap S_2$$

<u>Referencias</u>:
Complete el alumno
(1)
(2)
(3)

4. $\alpha \in F \wedge u \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \alpha\, u \in S_1 \cap S_2$

$$\alpha \in F \;\wedge\; u \in S_1 \cap S_2 \;\underset{(1)}{\Rightarrow}\; \alpha \in F \;\wedge\; u \in S_1 \;\wedge\; u \in S_2 \underset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} \alpha\, u \in S_1 \;\wedge\; \alpha\, u \in S_2 \underset{(3)}{\Rightarrow}\; \alpha\, u \in S_1 \cap S_2$$

<u>Referencias:</u>
Complete el alumno
(1)
(2)
(3)

Luego por 1., 2., 3., y 4. se tiene que $S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial de *V*.

Q.E.D.

<u>***Proposición 3***</u>

Sea V_F un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 dos subespacios vectoriales de V. Entonces la suma de S_1 y S_2 es también un subespacio de V. En símbolos,

$$S_1 \prec V \wedge S_2 \prec V \Rightarrow S_1 + S_2 \prec V$$

<u>*Demostración*</u>

Se define $\qquad S_1 + S_2 \overset{def}{=} \{\, v \in V \;/\; v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in S_1 \wedge v_2 \in S_2 \}$

Es decir, el conjunto $S_1 + S_2$ está formado por todos los vectores de V que se pueden descomponer como suma de dos vectores $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$.

1. $S_1 + S_2 \subset V$ por definición de $S_1 + S_2$

2. $S_1 + S_2 \neq \emptyset$, pues $0_v \in S_1 \wedge 0_v \in S_2 \wedge 0_v = 0_v + 0_v \Rightarrow 0_v \in S_1 + S_2$

3. $u, v \in S_1 + S_2 \Rightarrow u + v \in S_1 + S_2$

   En efecto

   $u, v \in S_1 + S_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2 \wedge v = v_1 + v_2$ con $u_1, v_1 \in S_1 \wedge u_2, v_2 \in S_2 \Rightarrow$

   $\Rightarrow u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$, con $u_1, v_1 \in S_1 \wedge u_2, v_2 \in S_2 \Rightarrow$

   $\Rightarrow u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$, con $u_1 + v_1 \in S_1 \wedge u_2 + v_2 \in S_2 \Rightarrow u + v \in S_1 + S_2$

4. $\alpha \in F \wedge u \in S_1 + S_2 \Rightarrow \alpha u \in S_1 + S_2$

   En efecto,

   $\alpha \in F,\ u \in S_1 + S_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \in F \wedge u = u_1 + u_2$, con $u_1 \in S_1 \wedge u_2 \in S_2 \quad \Rightarrow$
   $\Rightarrow \alpha u = \alpha (u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2$, con $\alpha u_1 \in S_1 \wedge \alpha u_2 \in S_2$

   Luego $\alpha u \in S_1 + S_2$

   De 1., 2., 3. y 4. se tiene que S_1+S_2 es un subespacio vectorial de V.

Q.E.D.

Observación:

La unión de subespacios vectoriales en general ***no es un subespacio vectorial***.

Contraejemplo:

Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2_{\boldsymbol{R}}$, y sean los subespacios vectoriales

$$S_1 = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y = x\} \qquad \text{y} \qquad S_2 = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y = 0\},$$

entonces la unión de estos dos subespacios es el conjunto

$$S_1 \cup S_2 = \{(x, y) \in R^2 \ / \ y = x \vee y = 0\}$$

Es claro que,

- $S_1 \cup S_2 \subset R^2$, por definición de $S_1 \cup S_2$
- $S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$, pues $(0,0) \in S_1 \cup S_2$

Pero, $S_1 \cup S_2$ no es cerrado para la suma de vectores, ya que

(1, 1) $\in S_1 \cup S_2 \ \wedge$ (1, 0) $\in S_1 \cup S_2$, sin embargo (1, 1) + (1, 0) = (2, 1) $\notin S_1 \cup S_2$

Por lo tanto $S_1 \cup S_2$ no es un subespacio vectorial de R^2.

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES

Definición 2

Sea V_F un espacio vectorial y sea A un subconjunto (finito o infinito) no vacío de V.

Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectores de A diferentes entre sí y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elementos cualesquiera del cuerpo F.

Se denomina ***combinación lineal de vectores del conjunto A con escalares del cuerpo F*** a la expresión

$$\boxed{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i} \qquad (1)$$

Es claro que al efectuar las operaciones indicadas en (1) se obtiene como resultado un vector del espacio vectorial V. Sea v tal vector, es decir

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

Al vector v se le llama "*valor de la combinación lineal*". También se dice que "*v se ha obtenido por medio de la combinación lineal de vectores del conjunto A*".

Si se considera una nueva selección de escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F$ se puede formar "otra" combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, esto es

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n \qquad (2)$$

Si u es el valor de esta combinación lineal se tiene

$$u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$$

También se puede formar la siguiente combinación lineal

$$0\, u_1 + 0\, u_2 + \ldots + 0\, u_n$$

Esta combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ se denomina "***combinación lineal trivial*** " la cual obviamente tiene el valor $\mathbf{0_V}$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial R_R^2, y sea $A = \{(1,1),(2,3),(1,0)\} \subset R^2$. Si se consideran los escalares 1, 2, -2 $\in$ R, se puede formar la siguiente combinación lineal de vectores del conjunto A

$$1\,(1,\,1) + 2\,(2,3) + (-2)\,(1,0) = (1,\,1) + (4,6) + (-2,0) = (3,7)$$

En donde (3, 7) es el valor de la combinación lineal.

Combinaciones Lineales Idénticas

Definición 3

Dos combinaciones lineales son idénticas si tienen los mismos términos no triviales.

Por ejemplo

$$1\,u_2\,,\qquad 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3,\qquad 0\,u_1 + 1\,u_2\,,$$

son combinaciones lineales idénticas.

Es claro que las combinaciones lineales idénticas tienen el mismo valor.

De acuerdo a este concepto, dado un conjunto A y una combinación lineal de vectores de A

$$\alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2 + \ldots + \alpha_n\, u_n$$

se puede suponer siempre que es una combinación lineal de ***todos*** los vectores de A, pues bastará completarla con términos triviales.

Así por ejemplo, si $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, la combinación lineal

$$a_1 v_1 + a_2 v_2$$

es una combinación lineal de todos los vectores de A, pues es idéntica a la combinación lineal

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + 0\, v_3$$

Observación

Aún cuando A sea un conjunto infinito, una combinación lineal no trivial de sus vectores tendrá siempre (por la forma en que fue definido el concepto) un número finito de términos no triviales.

SUBESPACIO VECTORIAL GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

Sean V_F un espacio vectorial y $A \subset V \wedge A \neq \varnothing$.

Se designa con $\overline{A}$ al conjunto de todos los vectores de V que se obtienen por medio de combinaciones lineales de vectores del conjunto A.

En símbolos

$$\boxed{\overline{A} = \left\{ v \in V \,/\, v = a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \ldots + a_n\, u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i\ ,\ \ a_i \in F \wedge u_i \in A\ ,\ \forall i = 1,2,\ldots,n \right\}}$$

Nota

El conjunto $\overline{A}$ se lee "*A barra*"

Proposición 4

El conjunto $\overline{A}$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración

1. $\overline{A} \subset V$, se cumple por definición de $\overline{A}$.
2. $\overline{A} \neq \varnothing$, pues $0_V \in \overline{A}$, ya que

$$0_V = 0\,u_1 + 0\,u_2 + \ldots + 0\,u_n \;\;,\quad u_i \in A \;\;,\quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Es decir, 0_V es combinación lineal de vectores del conjunto A

3. $u, v \in \overline{A} \Rightarrow u + v \in \overline{A}$

En efecto,

$$u, v \in \overline{A} \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i \wedge v = \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i \quad \text{con } a_i, b_i \in F \wedge u_i \in A \;,\quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Luego

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i = \sum_{i=1}^{n} (\, a_i u_i + b_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i$$

Con $c_i = a_i + b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Así, $u + v$ es una combinación lineal de vectores de A. Por lo tanto $u + v \in \overline{A}$

4. $\alpha \in F \wedge u \in \overline{A} \Rightarrow \alpha u \in \overline{A}$

Es claro que

$$u \in \overline{A} \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i \quad \text{con } a_i \in F \quad \wedge \quad u_i \in A, \forall i = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

luego,

$$\alpha\, u = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(a_i\, u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i \;\; \text{con } c_i = \alpha\, a_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

es decir que αu es una combinación lineal de vectores del conjunto A. Por lo tanto $\alpha u \in \overline{A}$.

Entonces de 1., 2., 3. y 4. se tiene que $\overline{A}$ es un subespacio vectorial de V.

Q.E.D

Definición 4

a) Al subespacio vectorial $\overline{A}$ se le denomina ***"subespacio vectorial generado por el conjunto A".***

b) Diremos también que **"*A es un generador del subespacio vectorial* $\overline{A}$",** pues "***todo vector de*** $\overline{A}$ ***es combinación lineal de vectores del conjunto*** *A*.

Nota

Es fácil probar que $A \subset \overline{A}$

Ejemplos

a) Sea el espacio vectorial R_R^3 y sea A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0)}, el subespacio generado por A es

$$\overline{A} = \{(x, y, z) \in R^3 / \ (x, y, z) = a_1(1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) \text{ con } a_1, a_2 \in R\}$$

Todo vector de $\overline{A}$ se expresa como

$$(x, y, z) = a_1(1, 0, 0) + a_2 (0, 1, 0) \quad \text{con } a_1, a_2 \in R$$

$$(x, y, z) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0)$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, 0)$$

Como a_1 y a_2 representan cualquier número real entonces la condición para que (x, y, z) sea combinación lineal de vectores de A es que $z = 0$

es decir,

$$(x, y, z) \in \overline{A} \Leftrightarrow z = 0$$

por lo tanto, el subespacio vectorial de R^3 generado por el conjunto

$$A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \quad \text{es} \quad \overline{A} = \{(x, y, z) \in R^3 / \ z = 0\}$$

Así, por ejemplo, el vector (5, -1, 0) es combinación lineal de los vectores de A, pues

$$(5, -1, 0) = 5\,(1, 0, 0) + (-1)\,(0, 1, 0)$$

b) Sea el espacio R_R^2 y el conjunto A = {(1, 1)}. El subespacio generado por el conjunto A es

$$\overline{A} = \{(x, y) \in R^2 / (x, y) = a\,(1, 1)\}$$

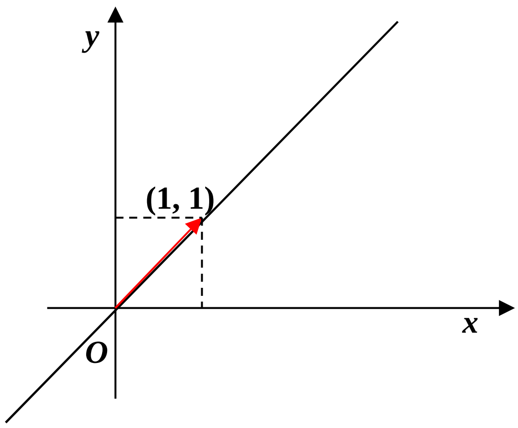
Es decir todo vector de $\overline{A}$ tiene la forma

$$(x, y) = a(1, 1) \quad \text{con } a \in \mathbf{R}$$

$$(x, y) = (a, a)$$

luego, $\quad (x, y) \in \overline{A} \Leftrightarrow x = y$

es decir $\quad \overline{A} = \{(x, y) \in R^2 / y = x\}$



La representación geométrica de $\overline{A}$ es la recta de ecuación $y = x$ (es la primera bisectriz). Para generar este subespacio vectorial bastó sólo un vector el (1, 1).

Definición 5

Dado un espacio vectorial V_F y un subconjunto no vacío A de V, se dice que A ***genera al espacio*** V si y sólo si $\overline{A} = V$, es decir que ***todo vector de V es combinación lineal de vectores del conjunto*** A.

Nota

En esta situación las siguientes expresiones son equivalentes

a) A es un generador de V

b) El espacio vectorial V es generado por el conjunto A

c) A genera a V

d) Todo vector de V se combinación lineal de vectores de A

Ejemplo

Sea el espacio $\boldsymbol{R^2_R}$ y el conjunto A = {(1, 1), (1,0)}. El subespacio generado por el conjunto A por definición viene dado por

$$\overline{A} = \{(x, y) \in R^2 / (x, y) = \alpha\,(1,1) + \beta\,(1,0)\}$$

esto es equivalente a decir que

$$\boxed{(x, y) \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} :\ (x, y) = \alpha\,(1,1) + \beta\,(1,0)}$$

Partiendo de la igualdad

$$\alpha\,(1, 1) + \beta\,(1, 0) = (x, y),$$

y realizando las operaciones indicadas se tiene

$$(\alpha,\ \alpha) + (\beta,\ 0) = (x, y)$$

$$(\alpha + \beta\,,\ \beta) = (x, y)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \qquad \beta = y \end{cases}$$

Uno de los modos de resolver este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es empleando el Método de Gauss (o Método de Eliminación Gaussiana)

$$
\begin{array}{l}
 \\
f_2+(-1)\,f_1 \\
(-1)\,f_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c}
1 & 1 & x \\
1 & 0 & y \\
\hline
1 & 1 & x \\
0 & -1 & -x+y \\
\hline
1 & 1 & y \\
0 & 1 & x-y
\end{array}
$$

Es claro que $rg\ A = rg\ A^a = 2 = n^o\ \ incógnitas$

y por Teorema de Rouché-Frobenius y su Corolario, el sistema es *compatible determinado*. Es decir, cualesquiera sean x e y, existen y son únicos los escalares $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ tales que

$$(x,y)=\alpha\,(1,1)+\beta\,(1,0).$$

Luego $\overline{A}=R^2$, es decir A es generador del espacio R^2**,** o bien todo vector de R^2 se puede expresar como combinación lineal de vectores del conjunto A.

<u>Observación</u>

Todo espacio vectorial es generador de sí mismo.

<u>Proposición 5</u>

Sea V_F un espacio vectorial y sean A y B dos subconjuntos de V no vacíos tales que $A \subset B$, entonces el subespacio generado por A está incluido en el subespacio generado por B. En símbolos,

$$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$$

<u>Demostración</u>

Sean A = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y B = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_m\}$. Es claro que $A \subset B$

Probar que $\overline{A} \subset \overline{B}$ equivale probar que $u \in \overline{A} \Rightarrow u \in \overline{B}$. En efecto

$$u \in \overline{A} \Rightarrow u = a_1\ u_1 + a_2\ u_2 + \ldots + a_n\ u_n =$$

$$= a_1\ u_1 + a_2\ u_2 + \ldots + a_n\ u_n + 0\ u_{n+1} + 0\ u_{n+2} + \ldots + 0\ u_m \ \Rightarrow\ u\ \in\ \overline{B}$$

Esto es porque u resulta una combinación lineal de los elementos de B.

ESPACIO FILA DE UNA MATRIZ

Sea una matriz M de tipo $m\times n$ con elementos en un cuerpo (F, +, ·).

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \ F^{m\times n}$$

Es claro que los vectores fila de la matriz M son vectores del espacio vectorial $F_F^{1\times n}$ [(1)]

[(1)] *El espacio vectorial* $F_F^{1\times n}$ *es el de las matrices con elementos en el cuerpo F y que tienen una fila y n columnas.*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n}] \\ f_2 = [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \;\; a_{2n}] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m = [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \dots \;\; a_{mn}] \end{array}\right\} \in \;\; F^{1\times n}$$

Si $\mathcal{F}$ es el conjunto de los vectores fila de la matriz M, es claro que $\mathcal{F}$ es un subconjunto del espacio vectorial F^{1xn}

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset F^{1\times n}$$

Definición 1

El ***Espacio Fila*** de la matriz M, denotado por S_f (M), es el subespacio vectorial generado por el conjunto de las filas de la matriz M, es decir es el subespacio generado por el conjunto $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset F^{1\times n}$. En símbolos,

$$S_f(M) = \overline{\mathcal{F}} \prec F^{1\times n}$$

En otras palabras, el ***Espacio Fila*** de la matriz M, es el conjunto de todos los vectores del espacio F^{1xn} que se expresan como combinación lineal de los vectores fila de la matriz M, esto es

$$S_f(M) = \{f \in F^{1\times n} / \;\; f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i, \;\; \forall \; i = 1,2,\dots,m; \;\; \alpha_i \in F \wedge f_i \;\; \text{fila de M} \}$$

Es decir,

$S_f(M) = \{f \in F^{1\times n} \;/\; f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m$, $\forall$ i = 1, 2, …, m; $\alpha_i \in F \wedge f_i$ fila de M$\}$

ESPACIO COLUMNA DE UNA MATRIZ

Sea una matriz M de tipo *mxn* con elementos en un cuerpo (F, +, ·).

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \;\; F^{m\times n}$$

Es claro que los vectores columnas de la matriz M son vectores del espacio vectorial $F_F^{m\times 1}$ (2)

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \in \;\; F^{m\times 1}$$

Si denotando con C al conjunto de los vectores columnas de la matriz M, resulta que C es un subconjunto del espacio vectorial F^{mx1}

(2) *El espacio vectorial* $F_F^{m\times 1}$ *es el de las matrices con elementos en el cuerpo F y que tienen m filas y 1 columna.*

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset F^{m\times 1}$$

Definición 2

El ***Espacio Columna*** de la matriz M, denotado por $S_c(M)$, es el subespacio vectorial generado por el conjunto de las columnas de la matriz M, es decir es el subespacio generado por el conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset F^{mx1}$. En símbolos,

$$S_c(M) = \overline{C} \prec F^{m\times 1}.$$

En otras palabras, el ***Espacio Columna*** de la matriz M, es el conjunto de todos los vectores del espacio F^{mx1} que se expresan como combinación lineal de los vectores columnas de la matriz M

$$S_c(M) = \{c \in F^{m\times 1} \;/\; c = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j ,\ \forall\ j = 1, 2, ..., n;\ \alpha_j \in F \ \wedge\ c_j \text{ columna de M}\}.$$

Esto es,

$$S_f(M) = \{c \in F^{m\times 1} \;/\; c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_n c_n ,\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_j \in F \wedge c_j \text{ columna de M}\}.$$

INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Definición 1

Sea V_F un espacio vectorial y sea $A \subset V \wedge A \neq \varnothing$

El conjunto A es ***linealmente independiente*** si y sólo si el único modo de obtener el vector nulo como combinación lineal de vectores de A es a través de la combinación lineal trivial.

En símbolos,

A es ***linealmente independiente*** $\overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\ u_i = 0_v \Rightarrow \forall\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n;\ a_i = 0 \right)$

Ejemplos

a. En el espacio vectorial R_R^3, el conjunto $A = \{(1, 2, -5)\}$ es linealmente independiente. En efecto, se toma una combinación lineal de valor (0, 0, 0) del único vector de A

$$a\,(1, 2, -5) = (0, 0, 0)$$

operando se tiene

$$(a, 2a, -5a) = (0, 0, 0)$$

Por igualdad de ternas ordenadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo (SELH)

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ -5a = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene tres ecuaciones lineales con una incógnita. Es evidente que se trata de un sistema compatible determinado, en el cual la única solución es $a = 0$ (solución trivial). Luego el conjunto A es linealmente independiente.

b. En el espacio vectorial R_R^2, el conjunto $A = \{(1, 2), (1, 1)\}$ es linealmente independiente.

Procediendo de manera análoga al ejemplo precedente se tiene

$$\alpha\,(1, 2) + \beta\,(1, 1) = (0, 0)$$

$$(\alpha, 2\alpha) + (\beta, \beta) = (0, 0)$$

$$(\alpha + \beta, 2\alpha + \beta) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Aquí se tiene un sistema homogéneo (SELH) de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y se sabe que todo SELH es compatible, es decir tiene al menos la solución trivial. Resta averiguar si es determinado o indeterminado. Resolviendo el sistema por el método de eliminación gaussiana,

$$\begin{array}{rcc|cl}
 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 2 & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & \\
f_2 + (-2)\,f_1 & 0 & -1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & (-1)\,f_2
\end{array}$$

Es evidente que $rg\ A = rg\ A^a = 2 = n^{\circ}\ incógnitas$,

y según el Teorema de Rouché-Frobenius y su Corolario, el SELH es compatible determinado, luego la única solución es la trivial, esto es

$$\alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

Luego por definición, el conjunto A es *linealmente independiente*.

c. En el espacio vectorial $R^2{}_R$, el conjunto $D = \{(1, 2), (2, 4)\}$ no es linealmente independiente. En efecto, procediendo de manera análoga al ejemplo precedente, se toma una combinación lineal de vectores del conjunto A que tenga valor cero vector,

$$\alpha\ (1,2)\ +\ \beta\,(2,4)=(0,0)$$

operando $$(\alpha, 2\alpha)\ +(2\beta, 4\beta)=(0,0)$$

$$(\alpha+2\beta,\ 2\alpha+4\beta)=(0,0)$$

e igualando se obtiene el SELH siguiente

$$\begin{cases} \alpha\ +\ 2\beta\ =0 \\ 2\alpha\ +\ 4\beta\ =0 \end{cases}$$

Se toma la matriz ampliada del sistema y se determina el rango de la matriz de coeficientes

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$rg\ \ A\ =1\neq\ 2\ =\ n^{o}\ \textit{incógnitas}$$

Se trata de un SELH compatible indeterminado cuyo conjunto solución es

$$S_o=\ \{(\alpha,\beta)\in R^2\ /\ \alpha=-2\beta\}$$

De modo que existen infinitas soluciones no triviales de la forma $(-2\beta,\ \beta)$, como por ejemplo $\alpha = 2$ y $\beta = -1$, por lo que el vector nulo se puede escribir como una combinación no trivial de los vectores de *D*

$$2\ (1, 2) + (-1)\ (2, 4) = (0, 0)$$

y como existe al menos una combinación lineal no trivial de vectores de *D* de valor 0_V se tiene que el conjunto **no es** linealmente independiente.

<u>Definición 2</u>

Sea V_F un espacio vectorial y sea $A\subset V\wedge A\neq\varnothing$.

El conjunto *A* es ***linealmente dependiente*** si y sólo si existe una combinación lineal no trivial de valor 0_v.

En símbolos,

A es ***linealmente dependiente*** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\left(\exists\ \ i\in\{\ 1,\ \ 2,\ \ \dots\ \ ,\ \ n\}:a_i\neq 0\wedge\sum_{i=1}^{n}a_i\ u_i\ =\ 0_v\right)$

Observación: A es linealmente dependiente si y sólo si A no es linealmente independiente

Ejemplo

El conjunto D del ejemplo c. precedente, es *linealmente dependiente*.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS LINEALMENTE DEPENDIENTES

Sea V_F un espacio vectorial y $A \subset V \wedge A \neq \emptyset$

Proposición 1

Si el vector nulo pertenece al conjunto A, entonces A es linealmente dependiente

Demostración

Sin perder generalidad, se puede suponer que $u_1 = 0_V \in A$, entonces la siguiente combinación lineal de vectores de A

$$a_1\ u_1 + 0\ u_2 + \ldots + 0\ u_n = 0_V \ , \text{con } a_1 \neq 0 \wedge \forall\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ u_i \in A$$

es una combinación lineal no trivial de valor 0_V. Luego A es Linealmente dependiente.

Q.E.D.

Ejemplos

a. En el espacio vectorial R_R^3, el conjunto A = {(1, 2, -5), (1,-1, 4), (0, 0, 0)} es linealmente dependiente.

b. En el espacio vectorial $R_R^{2\times3}$, el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente

Proposición 2

El conjunto A es linealmente dependiente si y sólo si existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores de A.

Demostración

$\Rightarrow$) La condición es necesaria

"Si A es linealmente dependiente entonces existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores"

En efecto, por hipótesis A es linealmente dependiente, entonces por Definición 2 existe una combinación lineal no trivial de vectores de A de valor 0_V, es decir

$$\exists\ \ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \ \text{ tal que } \ a_j \neq 0 \ \ \text{y}$$

$$a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \ldots + a_{j-1}\, u_{j-1} + a_j u_j + a_{j+1}\, u_{j+1} + \ldots + a_n\, u_n = 0_V\ , \quad \text{donde } u_j \in A,\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n$$

luego $$a_j u_j = -a_1\, u_1 - a_2\, u_2 - \ldots - a_{j-1}\, u_{j-1} - a_{j+1}\, u_{j+1} - \ldots - a_n\, u_n$$

Como $a_j \neq 0$, existe $\dfrac{1}{a_j}$, entonces pre-multiplicando por $\dfrac{1}{a_j}$ en ambos miembros de la igualdad precedente se tiene

$$\frac{1}{a_j} a_j u_j = \frac{1}{a_j}\left(-a_1\; u_1 - a_2\; u_2 - \ldots - a_{j-1}\; u_{j-1} - a_{j+1}\; u_{j+1} - \ldots - a_n\; u_n\right)$$

operando

$$u_j = -\frac{a_1}{a_j} u_1 - \frac{a_2}{a_j} u_2 - \ldots - \frac{a_{j-1}}{a_j} u_{j-1} - \frac{a_{j+1}}{a_j} u_{j+1} - \ldots - \frac{a_n}{a_j} u_n \qquad (\alpha)$$

Sea $b_i = \dfrac{-a_i}{a_j}, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n;\; i \neq j$

al reemplazar en (α), se tiene que

$$u_j = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \ldots + b_{j-1}\, u_{j-1} + b_{j+1}\, u_{j+1} + \ldots + b_n\, u_n$$

luego u_j es una combinación lineal de los restantes vectores de A.

⇐) La condición es suficiente

"Si existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores de A, entonces A es linealmente dependiente"

Sea $u_j \in A$ tal que, u_j es combinación lineal de los restantes vectores de A. Esto es,

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} b_i\, u_i$$

es decir

$$u_j = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \ldots + b_{j-1}\, u_{j-1} + b_{j+1}\, u_{j+1} + \ldots + b_n\, u_n$$

sumando en ambos miembros (- u_j) = (-1) u_j

$$0_v = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \ldots + b_{j-1}\, u_{j-1} + b_{j+1}\, u_{j+1} + \ldots + b_n\, u_n + (-1) u_j$$

reordenando los términos

$$0_v = b_1\; u_1 + b_2\; u_2 + \ldots + b_{j-1}\; u_{j-1} + (-1)\; u_j + b_{j+1}\; u_{j+1} + \ldots + b_n\; u_n$$

Esta es una combinación lineal **no trivial** (uno de los escalares es -1) de vectores de A de valor 0_V. En consecuencia, el conjunto A es linealmente dependiente.

Q.E.D.

<u>Proposición 3</u>

Sea A un subconjunto no vacío del espacio vectorial V y tal que $A \neq \{0_V\}$. El conjunto A es linealmente dependiente si y sólo si existe un subconjunto propio de A que genera el mismo subespacio que genera A.

En símbolos

$$A \text{ es linealmente dependiente } \Leftrightarrow \exists\, A' \subset A \wedge A' \neq A : \overline{A'} = \overline{A}$$

Demostración

$\Rightarrow$) La condición es necesaria

A es linealmente dependiente $\Rightarrow \exists\, A' \subset A \wedge A' \neq A : \overline{A'} = \overline{A}$

Por hipótesis A es linealmente dependiente y $A \neq \{0_V\}$, entonces por Proposición 2

$$\exists u_j \in A : u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i\, u_i \qquad (\beta)$$

con $a_i \in F \wedge u_i \in A$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

Sea $A' = A - \{u_j\}$ entonces, es claro que existe $A' \subset A \wedge A' \neq A$

Ahora se debe probar que

$$\overline{A'} = \overline{A}$$

que por definición de igualdad de conjuntos equivale a demostrar que $\overline{A'} \subset \overline{A} \wedge \overline{A} \subset \overline{A'}$

a) Como $A' \subset A$, se sigue que $\overline{A'} \subset \overline{A}$, (por Proposición 5 de subespacios vectoriales)

b) Se debe probar que $\overline{A} \subset \overline{A'}$

Sea $u \in \overline{A}$, entonces u es una combinación lineal de vectores del conjunto A. Es decir,

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_{j-1} u_{j-1} + b_j u_j + b_{j+1} u_{j+1} + \ldots + b_n u_n$$

Pero como u_j es una combinación lineal de los restantes vectores de A por (β), entonces

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_{j-1} u_{j-1} + b_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i\, u_i + b_{j+1} u_{j+1} + \ldots + b_n u_n$$

Operando se tiene

$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_{j-1} u_{j-1} + b_j (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{j-1} u_{j-1} + a_{j+1} u_{j+1} + \ldots + a_n u_n) + b_{j+1} u_{j+1} + \ldots + b_n u_n$$

y aplicando axiomas de la estructura de espacio vectorial y agrupando convenientemente se llega a la expresión

$$u = (b_1 + b_j a_1) u_1 + (b_2 + b_j a_2) u_2 + \ldots + (b_{j-1} + b_j a_{j-1}) u_{j-1} + (b_{j+1} + b_j a_{j+1}) u_{j+1} + \ldots + (b_n + b_j a_n) u_n$$

Luego u es una combinación lineal de vectores del conjunto A', esto significa que $u \in \overline{A'}$.

$\Leftarrow$) La condición es suficiente

$\exists A' \subset A \wedge A' \neq A : \overline{A'} = \overline{A} \Rightarrow A$ es linealmente dependiente

Supóngase que existe A' subconjunto propio de A tal que $\overline{A'} = \overline{A}$. Entonces

$$A - A' \neq \emptyset \Rightarrow \exists v_j \in A - A' \Rightarrow v_j \in A \wedge v_j \notin A'$$

además como $v_j \in A$, entonces $v_j \in \overline{A}$ y como por hipótesis $\overline{A} = \overline{A'}$ resulta que

$$v_j \in \overline{A'}$$

Por lo tanto v_j es una combinación lineal de los vectores de A'. Pero los vectores de A' son vectores de A pues $A' \subset A$, por lo tanto v_j es combinación lineal de los vectores de A, excepto él mismo. Y como $v_j \in A$ existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores de A, entonces por Proposición 2 el conjunto A es linealmente dependiente.

Proposición 4

Todo conjunto que contiene a un subconjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

En símbolos,

$$A' \subset A \;\wedge\; A' \text{ es linealmente dependiente} \;\Rightarrow\; A \text{ es linealmente dependiente}$$

Demostración

Sea $A' \subset A$ y A' linealmente dependiente. Entonces existe una combinación lineal de vectores de A' no trivial de valor 0_V. Pero toda combinación de vectores de A' es combinación de vectores de A, pues $A' \subset A$. Luego A es linealmente dependiente.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Se puede enunciar las propiedades referidas a conjuntos linealmente independientes tomando los contra-recíprocos de los condicionales de las propiedades de los conjuntos linealmente dependientes.

Proposición 1'

Si el conjunto A es linealmente independiente, entonces el vector nulo no pertenece al conjunto A.

Proposición 2'

El conjunto A es linealmente independiente si y sólo si ningún vector de A es combinación lineal de los restantes vectores de A.

Proposición 3'

El conjunto A es linealmente independiente si y sólo si ningún subconjunto propio de A genera el mismo subespacio que el que genera A.

Proposición 4'

Todo subconjunto no vacío de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

RANGO DE UNA MATRIZ

Definición3

El ***rango*** de una matriz $M \in F^{m\times n}$ es el mayor número de vectores filas (o columnas) linealmente independientes que tiene la matriz M.

Notación

El rango de la matriz M se denota con ***rg*** **M**.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición 4

Sea V_F un espacio vectorial y sea B un subconjunto no vacío y **ordenado** de V. El conjunto B es una base del espacio vectorial V si y sólo si,

i) B es Linealmente Independiente

ii) B es Generador del espacio vectorial V

Notas

- Consideraremos en adelante sólo espacios vectoriales que tienen bases finitas.
- Remarcamos que el orden en que están dados los elementos de toda base es una cuestión muy importante, este hecho podremos observarlo más adelante.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial R_R^n y considérese el conjunto ordenado $E = \{E_1, E_2,\dots, E_n\}$ donde E_i representa a la n-upla cuya i-ésima componente es 1 y las restantes son 0. Esto es

$$E = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$$

El conjunto E es una base del espacio vectorial R_R^n, en efecto

i) E es linealmente independiente

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ tales que $a_1E_1 + a_2E_2 + \dots + a_nE_n = (0, 0, \dots, 0)$

Es decir,

$$a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

Por igualdad de n-uplas ordenadas de números reales resulta

$$a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge, \dots, \wedge a_n = 0$$

ii) E es Generador del espacio vectorial R_R^n

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_R^n$ si existen escalares $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ tales que

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1(1, 0, \ldots, 0) + b_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + b_n(0, 0, \ldots, 1)$

entonces debe ocurrir que

$$b_1 = x_1 \,,\, b_2 = x_2 \,,\, \ldots,\, b_n = x_n$$

De i) y ii) se sigue que es una base del espacio vectorial R_R^n.

Nota

A la base E se le denomina ***base canónica***, observemos que tiene n elementos. En particular,

- si n = 1, la base canónica del espacio vectorial R_R es $B = \{(1)\}$;
- si n = 2, la base canónica del espacio vectorial R_R^2 es $B = \{(1,0),(0,1)\}$;
- si n = 3, la base canónica del espacio vectorial R_R^3 es $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Ejercicios

1) Pruebe que en el espacio vectorial $R_R^{m\times n}$ de las matrices reales de tipo $m\times n$, una base es el conjunto ordenado con mn elementos dado por

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nota: Esta base es la base canónica del espacio vectorial $R_R^{m\times n}$

En particular la base canónica del espacio vectorial $R_R^{2\times 2}$ es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2) Pruebe que en el espacio vectorial $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{R}}^n[x]$ de los polinomios con coeficientes reales en la variable x de grado menor o igual que n (en donde se incluye el polinomio nulo el cual no tiene grado asignado), una base es el conjunto ordenado con $n + 1$ elementos dado por

$$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

Nota: Esta base es la base canónica del espacio vectorial $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{R}}^n[x]$

En particular en $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{R}}^3[x]$, el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales en la variable x de grado menor o igual que 3 (en donde se incluye el polinomio nulo), la base canónica es

$$B = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

Proposición 5

Sea V_F un espacio vectorial. Si B es una base de V, entonces todo vector del espacio vectorial V se escribe de modo único como combinación lineal de vectores de la base dada B.

Demostración

Sea $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ base de V. Se probará que

$$v \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F: \; v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

Por ser $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ **generador** del espacio vectorial V se tiene:

$$v \in V \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F: v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \qquad ①$$

se debe probar que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ son únicos.

para ello supóngase que,

$$\exists \; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F: v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n \qquad ②$$

Restando ②-① miembro a miembro:

$$0_V = (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n) - (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) =$$

$$0_V = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_n u_n =$$

$$0_V = (\beta_1 - \alpha_1) u_1 + (\beta_2 - \alpha_2) u_2 + \cdots + (\beta_n - \alpha_n) u_n$$

Como B es **linealmente independiente** y ésta es una combinación lineal de vectores de B de valor 0_V entonces esta combinación lineal debe ser la trivial, es decir los escalares deben ser simultáneamente cero

$$\begin{array}{c} \beta_1 - \alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ \beta_n - \alpha_n = 0 \Rightarrow \beta_n = \alpha_n \end{array}$$

Luego, los escalares son únicos. **Q.E.D.**

Definición 5

A los únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, que permiten escribir al vector $v \in V$ como combinación lineal de vectores de una base $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, se les denomina *coordenadas del vector v con respecto a la base B de V* y se denota con,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Es claro que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ caracterizan al vector $v \in V$, en el sentido de que son los únicos posibles que permiten expresarlo en términos de los vectores de la base dada *B*.

Ejemplo 1

En el espacio vectorial R^2_R, considere el conjunto $B = \{(1,0),(0,1)\}$.

a) Muestre que *B* es una base de R^2_R,

b) Determine las coordenadas de cualquier vector de R^2_R, con respecto a la base *B*.

a) *Resolución*

i) *B* es generador de *V*. En efecto,

$$(x,y) \in R^2, \exists\, \alpha, \beta \in R : (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

$$(\alpha,0) + (0,\beta) = (x,y)$$

$$(\alpha,\beta) = (x,y)$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas α y β. Es evidente que

$$rg\ A = rg\ A^a = 2 = n^o\ incógnitas$$

por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, luego existen y son únicos los escalares que permiten escribir a todo vector del espacio vectorial R^2_R, como combinación lineal de vectores del conjunto *B*. En esta situación los escalares coinciden con las propias componentes de todo vector (x, y).

ii) *B* es LI

Para ello tomaremos una combinación lineal de valor (0, 0) de vectores del conjunto *B*.

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0)$$

$$(\alpha,0) + (0,\beta) = (0,0)$$

$$(\alpha,\beta) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Es claro que la única solución de este sistema es la trivial, por lo tanto el conjunto *B* es linealmente independiente.

Luego por i) y ii) B es una base del espacio vectorial R^2_R. Es más *B* es la *base canónica* de R^2_R

b) <u>*Resolución*</u>

El vector de coordenadas de todo vector $(x,y)\in R^2$ respecto de la base *B* viene dado por

$$[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por ejemplo,

$$[(1,5)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplo 2</u>

En el espacio vectorial R^2_R, considere el conjunto $A=\{(1,1),(1,0)\}$.

a) Muestre que *A* es una base de R^2_R,

b) Determine las coordenadas del vector de cualquier vector de R^2_R, respecto a la base *A*.

a) <u>*Resolución*</u>

i) *A* es generador de *V*. En efecto,

$$(x,y)\in R^2, \exists\, \alpha,\beta \in R : (x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

$$(\alpha,\alpha) + (\beta,0) = (x,y)$$

$$(\alpha+\beta,\alpha) = (x,y)$$

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha \qquad = y \end{cases}$$

ii) *A* es linealmente independiente

$$\alpha(1,1) + \beta(1,0) = (0,0)$$

$$(\alpha,\alpha) + (\beta,0) = (0,0)$$

$$(\alpha+\beta,\alpha) = (0,0)$$

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \qquad = 0 \end{cases}$$

(1) y (2) son dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen la misma matriz de coeficientes, luego es posible aplicar el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada con la columna de términos independientes del sistema (1) y con la columna de términos independientes del sistema (2) de la siguiente manera

$$\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \end{array} \quad f_2 + (-1)f_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & -1 & y-x & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)f_2} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x-y & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+(-1)f_2} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & x-y & 0 \end{array}\right)$$

Si se analizan las matrices reducidas de las matrices ampliadas de cada sistema se observa, en ambos casos, que

$$rg\ A = rg\ A^a = 2 = n^o\ incógnitas\ \ (*)$$

i) (*) significa que el sistema (1) es compatible $\forall x, y \in R$, es decir que

cualesquiera sean $x, y \in R$, $\exists \alpha, \beta \in R : (x, y) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$, luego A es generador de R^2.

ii) (*) significa que el sistema (2) es compatible determinado, es decir que la única solución es la trivial, luego A es L.I.

Por i) y ii) A es una base de R_R^2 .

b) El vector de coordenadas de todo vector $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ respecto de la base A viene dado por, $[(x, y)]_A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

y reformulando el sistema (1)

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = x - y \end{cases}$$

se obtiene

$$[(x, y)]_A = \begin{bmatrix} y \\ x - y \end{bmatrix}$$

Por ejemplo,

$$[(1,5)]_A = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Observaciones

1. Si la base es la canónica, las coordenadas de todo vector son las componentes del vector.
2. Como podemos observar en los dos ejemplos precedentes, en un mismo espacio vectorial las coordenadas de un mismo vector respecto de una base varían si cambiamos de base.

No resulta evidente que dado un espacio vectorial cualquiera, éste posea una base. Ahora veremos que en realidad es posible determinar por lo menos una base.

Teorema de Existencia de bases

Todo espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ admite al menos una base.

Demostración

Sea $G = \{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ un generador de *V*, entonces siempre existe un subconjunto de *G* que es linealmente independiente.

En efecto, dado que $V \neq \{0_V\}$, entonces el conjunto *G* debe tener por lo menos un elemento $u_j \neq 0_V$ (pues de otro modo generaría sólo a $\{0_V\}$). Por lo tanto, *G* contiene al menos al conjunto $\{u_j\}$ que es linealmente independiente.

Sea ahora *B* el conjunto que tiene el mayor número posible de vectores de *G* y que es linealmente independiente. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ (α)

Nota

Siempre es posible determinar al conjunto *B* ordenando convenientemente los elementos del conjunto G.

Es fácil ver que vectores restantes de *G*, es decir los vectores $u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots, u_r$ son combinaciones lineales de los vectores del conjunto *B*.

Pues si por ejemplo u_{n+1}, no fuera combinación lineal de los vectores de *B*, entonces el conjunto

$$B \cup \{u_{n+1}\} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$$

es linealmente independiente en virtud de la Proposición 2´ de Independencia lineal; y entonces el conjunto *B* no tiene el mayor número de vectores linealmente independientes de *G*, lo que resulta una contradicción.

Por tanto

$$\forall\, k = n+1, \ldots, r \;\; ; \quad u_k = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \quad (\beta)$$

pero entonces todo vector del espacio vectorial es combinación lineal de elementos de *B*. En efecto, por ser *G* generador de *V* se tiene

$$v \in V \Rightarrow \exists a_1, a_2, \cdots, a_r \in F \;/\; v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + a_{n+1} u_{n+1} + \ldots + a_r u_r \,.$$

Pero en virtud de (β), es

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + \ldots + a_r \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \,.$$

es decir

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + a_{n+1}(b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n) + \ldots + a_r (c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n)$$

Es evidente que v es combinación lineal de $u_1, u_2, \cdots, u_n$, con lo cual probamos que B es un generador de V.

Y como además B es linealmente independiente, por (α), entonces B es una base de V.

Q.E.D.

Observaciones

1. Con el teorema precedente se muestra que "todo generador de un espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ contiene a una base". Notemos que la idea subyacente es que, dado un generador del espacio, pueden ir eliminándose de él los vectores "redundantes" que posea hasta quedar con un conjunto linealmente independiente que siga generando al espacio V.
2. No debemos perder de vista que un espacio vectorial puede tener más de una base. Por ejemplo bases del espacio vectorial R^2_R son los conjuntos ordenados {(1, 1), (1, 0)}, {(1, 0), (0, 1)}, {(2, 0), (0, 2)}, etc.

Ejemplo

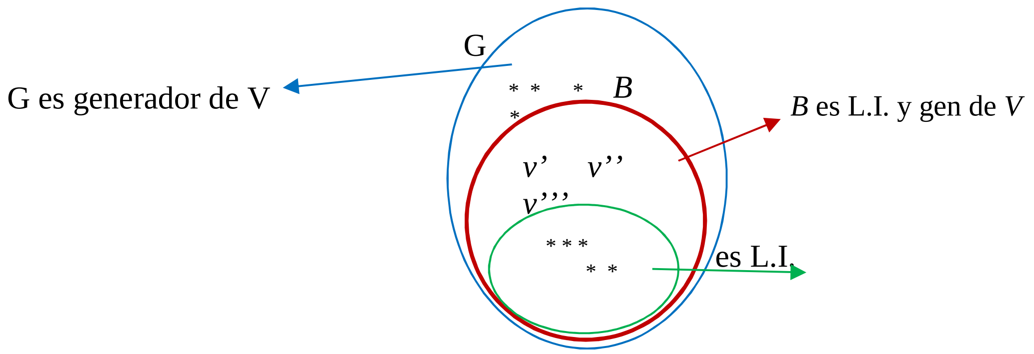
El conjunto $G = \{(1,1),(1,0),(2,1),(1,2)\}$ es un generador del espacio vectorial $R^2{}_R$ y G contiene al conjunto {(1,1),(1,0)} que es linealmente independiente y también es generador del espacio vectorial $R^2{}_R$, es decir es una base del espacio vectorial $R^2{}_R$.

Teorema

Sea V_F un espacio vectorial. Si el conjunto X es linealmente independiente y G es un generador de V, tales que $X \subset G$, entonces existe B base de V tal que $X \subset B \subset G$.

Idea de la demostración

Consiste en ir "agregando" al conjunto X vectores v´, v´´, etc., de $G - X$ de tal modo que los sucesivos conjuntos que se obtengan $X \cup \{v'\}, X \cup \{v', v''\}$, etc. sean también linealmente independiente hasta lograr un conjunto B que sea linealmente independiente y además que genere al espacio V.



Nota

De acuerdo con el enunciado por este teorema, podemos concluir también que todo conjunto linealmente independiente puede ser ampliado a una base del espacio. En otras palabras, dado un conjunto linealmente independiente, existe una base que lo contiene.

Ejemplo

En el espacio vectorial R^3_R, consideremos los siguientes conjuntos

$$X = \{(1,0,0)\}, \quad G = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$$

Es claro que *X* es linealmente independiente y *G* es un generador del espacio vectorial V y además $X \subset G$

A partir de $X = \{(1,0,0)\}$ agregando un vector de $G - X$ conseguimos

$Y = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, este conjunto es linealmente independiente pero no genera R^3_R.

Agregamos a *Y* otro vector de *G* – *Y*, y obtenemos

$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, este conjunto es linealmente independiente y genera el espacio R^3_R, por lo tanto es una base de R^3_R. Además verifica la condición $X \subset B \subset G$ que indica el teorema.

Proposición 6 *(Sin demostración)*

Sea V_F un espacio vectorial. Si X es un subconjunto linealmente independiente de *V* y *G* generador de *V*, entonces el número de elementos de *X* es menor o igual que el número de elementos de G.

En símbolos,

$$X \text{ linealmente independiente } \wedge G \text{ generador de } V \Rightarrow \# X \leq \# G .$$

Proposición 7

Toda base de un espacio vectorial V_F tiene el mismo número de elementos.

Demostración

Sean B_1 y B_2 bases de V_F, entonces

Por ser B_1 linealmente independiente y B_2 generador de *V*, es

$$\# B_1 \leq \# B_2 \quad (\alpha)$$

Por ser B_2 linealmente independiente y B_1 generador de *V*, es

$$\# B_2 \leq \# B_1 \quad (\beta)$$

Luego de (α) y (β) se tiene

$$\# B_1 = \# B_2$$

Q.E.D.

Ejemplos

En el espacio vectorial R^n_R toda base tiene *n* elementos.

En el espacio vectorial $R^{m\times n}_R$ toda base tiene *mn* elementos.

En el espacio vectorial $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{R}}^{n}[x]$ toda base tiene n+1 elementos.

En el espacio vectorial C_R toda base tiene dos elementos.

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Dado que toda base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos podemos considerar a este número como una propiedad del espacio.

Definición 6

La ***dimensión*** de un espacio vectorial V_F , a la que denotaremos con *dim V*, es el número de elementos de una base cualquiera de *V*.

Definición 7

La dimensión del espacio vectorial V = $\{0_v\}$ es 0. Esto es *dim* $\{0_v\}$ = 0.

Nota

En virtud de la Definición 6, si una base cualquiera de un espacio vectorial V_F tiene n elementos, entonces la dimensión de *V* es *n*, esto es

$$dim\ V = n$$

Ejemplos

- $dim\ R_R = 1$
- $dim\ R_R^2 = 2$
- $dim\ R_R^3 = 3$
- $dim\ R_R^n = n$
- $dim\ R_R^{m\times n} = mn$
- $dim\ P_R^n[x] = n+1$
- $dim\ sim(3) = 6$, dimensión el espacio de matrices simétricas de orden 3.
- $dim\ TS(3) = 6$, dimensión del espacio de matrices triangular superior de orden 3.
- $dim\ Diag(3) = 3$, dimensión del espacio de matrices diagonales de orden 3.

Observaciones

Si *V* un espacio vectorial de dimensión finita *n*, entonces:

1- Todo generador de *V* tiene ***al menos*** *n* elementos (pues todo generador contiene una base). Por lo tanto una base tiene al menor la menor cantidad de vectores que genera el espacio vectorial *V*.

2- Todo conjunto linealmente independiente en V tiene ***a lo sumo*** n vectores (pues todo conjunto linealmente independiente puede ampliarse a una base). Por lo tanto toda base de V tiene la mayor cantidad de vectores linealmente independientes.

El siguiente enunciado establece una relación entre las dimensiones de un espacio vectorial V_F y un subespacio vectorial cualquiera del mismo.

Teorema

Sea V_F un espacio vectorial de dimensión finita n. Si S es un subespacio vectorial de V, entonces

i) $dim\ S \leq dim\ V = n$

ii) Si $dim\ S = n$, *entonces* $S = V$

Demostración

i) En efecto,

Si $S = \{0_v\}$ es claro que $dim\ S = 0 \leq n$

Supongamos entonces que $S \neq \{0_v\}$ y sea X una base de S.

Por ser X linealmente independiente en S es también un subconjunto linealmente independiente de V; por lo que tiene a lo sumo n vectores, por lo tanto:

$$dim\ S = \#\ X \leq dim\ V = n$$

luego

$$dim\ S \leq dim\ V = n$$

ii) Si S es tal que, $dim\ S = dim\ V = n$, entonces toda base X de S, tiene n elementos. Por lo tanto X es también base de V, ya que al ser X un subconjunto linealmente independiente de V que tiene n elementos, genera al espacio V.

i) Es claro que, si X no genera el espacio V, por ser X linealmente independiente existe B base de V tal que $X \subset B \wedge X \neq B$ y de acuerdo con esto existe una base de V con más de n vectores, lo que contradice la hipótesis $dim\ V = n$. Por lo tanto X es generador de V (es decir $\overline{X} = V$), pero X es también generador de S ($\overline{X} = S$) de lo que se deduce que $S = V$.

Q.E.D.

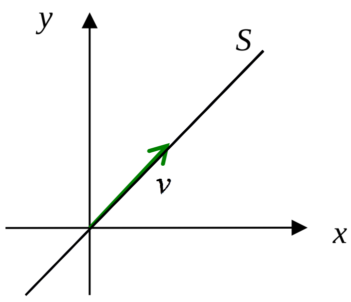
Ejemplo

En el espacio vectorial $V_F = R^2_R$ consideremos al conjunto $S = \{(x, y) \in R^2\ /\ y = x\}$.

Se sabe que $dim\ R^2_R = 2$ y que S es un subespacio vectorial de R^2 generado por el conjunto $\{(1, 1)\}$ y que es obviamente linealmente independiente. Por lo tanto $\{(1, 1)\}$ es una base de S y de allí que

$$\dim S = 1 < dim\ R^2_R = 2$$

Geométricamente, el subespacio vectorial S puede representarse por una recta que contiene al origen del sistema de coordenadas



DIMENSIÓN DE LOS ESPACIOS FILA Y COLUMNA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz $M \in F_F^{m\times n}$

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F_F^{m\times n}$$

Los vectores columnas de la matriz M son vectores del espacio vectorial $F_F^{m\times 1}$

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \in \; F_F^{m\times 1}$$

Denotando con C al conjunto de los vectores columnas de la matriz M, resulta que C es un subconjunto del espacio vectorial $F^{m\times 1}$

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset F^{m\times 1}$$

Y por lo tanto el ***Espacio Columna*** de la matriz M, es el subespacio vectorial de $F_F^{m\times 1}$, generado por el conjunto C de las columnas de la matriz M.

En otras palabras el ***Espacio Columna*** de la matriz M, es el subespacio vectorial de $F_F^{m\times 1}$, formado por todas las combinaciones lineales de vectores del conjunto $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

Simbólicamente

$$\mathrm{S_c}(\mathrm{M}) = \overline{C} = \left\{ c \in F^{m\times 1} \,/\, c = \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_j, \;\; \forall j = 1, 2, .., n \,;\, \beta_j \in F \wedge c_j \in C \right\} \prec F^{m\times 1}$$

Es claro entonces que

$$\boxed{\dim S_C(M) \le \dim F^{m\times 1} = m}$$

Es decir, la dimensión del Espacio columna de la matriz M es menor o igual que el número de filas de la matriz.

Por otro lado, los vectores fila de la matriz M son vectores del espacio vectorial $F_F^{1\times n}$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = [a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}] \\ f_2 = [a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}] \\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ . \\ f_m = [a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn}] \end{array}\right\} \in F^{1\times n}$$

Si $\mathcal{F}$ es el conjunto de los vectores fila de la matriz M, es claro que $\mathcal{F}$ es un subconjunto del espacio vectorial F^{1xn}

$$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset F^{1xn}$$

Y por lo tanto el ***Espacio Fila*** de la matriz M, es el subespacio vectorial de $F_F^{1\times n}$ generado por el conjunto de las filas de la matriz M.

En otras palabras, el ***Espacio Fila*** de la matriz M, es el subespacio vectorial de $F_F^{1\times n}$ formado por todas las combinaciones lineales de vectores fila del conjunto $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

En símbolos,

$$\mathrm{S_f}\,(\mathrm{M}) = \overline{\mathcal{F}} = \left\{ f \in F^{1xn} \ / \ f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i, \forall i = 1, 2, \dots, m; \alpha_i \in F \wedge f_i \in \mathcal{F} = F^{1\times n} \right\}$$

Es claro entonces que

$$\boxed{dim\, S_F\,(M) \leq dim F^{1\times n} = n}.$$

Es decir, la dimensión del Espacio fila de la matriz M es menor o igual que el número de columnas de M.

RANGO DE UNA MATRIZ

Defínción 8

Se llama rango columna de la matriz M a la dimensión del espacio columna de M.

$$rg_C\, M = dim S_C\,(M) \leq m$$

Definición 9

Se llama rango fila de la matriz M a la dimensión del espacio fila de M.

$$rg_F\, M = dim S_F\,(M) \leq n$$

Definición 10

El rango de una matriz *M*, al que denotaremos con *rg M*, es igual al rango columna y al rango fila de *M*.

$$rg\, M = rg_C\, M = rg_F\, M$$

Observación

Si $M \in R^{m\times n}$, entonces el rango de la matriz M es menor o igual que el más chico de los números *m* y *n*. Esto es

$$rg\, M \leq min(m,n)$$

Ejemplos

- Si $M \in R^{4\times 8}, rg(M) \leq 4$.
- Si $M \in R^{1\times 5}, rg(M) \leq 1$.
- Si $M \in R^{6\times 2}, rg(M) \leq 2$.
- Si $M \in R^{6\times 1}, rg(M) \leq 1$.

Notas

1. La matriz nula tiene rango cero.
2. El hecho de que las dimensiones de dos espacios sean iguales no significa que los espacios sean iguales.

DIMENSIÓN DE LA SUMA

Teorema (sin demostración)

Sea V_F un espacio vectorial. Si S_1 y S_2 son subespacios vectoriales de *V*, entonces

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Observación

Si $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$ entonces $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$

Proposición 8 (sin demostración)

Sea V_F un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 dos espacios vectoriales de *V*. Si B_1 es base de S_1 y B_2 es base de S_2 entonces $B_1 \cup B_2$ es un generador de $S_1 + S_2$.

Observación

En la Proposición 8, si bien $B_1 \cup B_2$ es un generador de $S_1 + S_2$ esto no implica necesariamente que $B_1 \cup B_2$ sea linealmente independiente. Es decir que $B_1 \cup B_2$ puede o no ser linealmente independiente.

Proposición 9 (sin demostración)

Sea V_F un espacio vectorial y sean S_1 y S_2 dos espacios vectoriales de V. Si B es base de $S_1 \cap S_2$ y se amplía hasta conseguir una base B_1 de S_1 y una base B_2 de S_2, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base de $S_1 + S_2$.