ÁLGEBRA LINEAL

Ingenierías

ÁLGEBRA II

LM - PM

Unidad Nº 4

Espacios Vectoriales con Producto Interior

FCEyT - UNSE

Unidad Nº 4: ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERIOR

1.- ESPACIO VECTORIAL REAL

Definición 1

Un *espacio vectorial real* es un espacio vectorial definido sobre el cuerpo R de los números reales.

PRODUCTO INTERIOR

Definición 2

Sea V un espacio vectorial real y sea la función $\bullet$ que a cada par ordenado de vectores de V le hace corresponder un único escalar real, esto es

$$\begin{aligned} \bullet : V \times V &\to R \\ (u, v) &\mapsto u \bullet v \end{aligned}$$

La función $\bullet$ es un producto interior si y sólo si se verifican los siguientes axiomas:

Ax.1. $\forall\ u, v \in V;\ u \bullet v = v \bullet u$

Ax.2. $\forall\ u, v, w \in V;\ u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$

Ax.3. $\forall\ a \in R,\ \forall\ u, v \in V;\ (au) \bullet v = a(u \bullet v)$

Ax.4. $\forall\ u \in V;\ u \bullet u \geq 0 \quad \wedge$
$u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

Definición 3

Se llama ***espacio euclídeo*** a todo espacio vectorial real de dimensión finita dotado de un producto interior.

Ejemplos

- En el espacio vectorial real $\boldsymbol{R^2}$ considérese la siguiente función

  $$\bullet : R^2 \times R^2 \to R \,/\, (x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) \overset{def}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2$$

  La función $\bullet$ así definida es un producto interior en el espacio vectorial R^2 ya que se satisfacen todos los axiomas de la Definición 2. Luego R^2 es un espacio vectorial euclídeo.

- En el espacio vectorial real R^n ($n \in \boldsymbol{N}$), es un producto interior la función

  $$\bullet : R^n \times R^n \to R \quad \text{definida por}$$

  $$(a_1, a_2, ..., a_n) \bullet (b_1, b_2, ..., b_n) \overset{def}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

  luego R^n es un espacio vectorial euclídeo.

Nota

Cualquiera sea $n \in \mathbf{N}$, el producto interior definido precedentemente se suele denominar "*Producto escalar*" o "*Producto punto*".

Propiedades del producto interior

Proposición 1

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces

$\forall \; a \in R, \; \forall \; u, v \in V; \; u \bullet (av) = a(u \bullet v)$

Demostración

Sean $a \in R; \; u, v \in V$, entonces se tiene que

$$u \bullet (av) \underset{(1)}{=} (av) \bullet u \underset{(2)}{=} a(v \bullet u) \underset{(3)}{=} a(u \bullet v)$$

Referencias:
(1) Por Ax. 1 de producto interior.
(2) Por Ax. 3 de producto interior.
(3) Por Ax. 1 de producto interior

Q.E.D.

Proposición 2

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces

$\forall \; u \in V; \; 0_V \bullet u = u \bullet 0_V = 0$

Demostración

Sea $u \in V$, entonces

$$0_V \bullet u \underset{(1)}{=} (0_V + 0_V) \bullet u$$

$$0 + (0_V \bullet u) \underset{(2)}{=} 0_V \bullet u + 0_V \bullet u$$

$$0 \underset{(3)}{=} 0_V \bullet u$$

Referencias:

(1) 0_V es el neutro para la suma en V.

(2) 0 es el neutro para la suma en R y por Ax.2.

(3) Porque en el grupo ($\boldsymbol{R}$, +) vale la ley cancelativa.

Q.E.D.

Proposición 3

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces

$\forall \; u, v \in V; \; |u \bullet v| \leq \sqrt{u \bullet u}\sqrt{v \bullet v}$.

Conocida como la ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz***.

<u>*Demostración*</u>

- Si $v = 0_V$, se tiene que $u \bullet v = 0$ y $\sqrt{v \bullet v} = 0$ de modo que se satisface la igualdad

$$|u \bullet v| = \sqrt{u \bullet u}\sqrt{v \bullet v}\ .$$

- Supongamos que $v \neq 0_V$. Cualesquiera sean los escalares *a, b* ∈ *R*, es $au + bv \in V$, y por definición de producto interior

$$0 \leq (au + bv) \bullet (au + bv)\ .$$

Desarrollando el segundo miembro

$$0 \leq a^2(u \bullet u) + 2ab(u \bullet v) + b^2(v \bullet v) \qquad (\alpha)$$

como la desigualdad (α) vale cualesquiera sean los escalares *a, b* ∈ *R,* en particular sigue valiendo si se toma

$$a = v \bullet v \quad \wedge \quad b = -(u \bullet v)$$

Sustituyendo estos valores de *a* y *b* en (α) y efectuando las operaciones indicadas se obtiene:

$$0 \leq (v \bullet v)^2(u \bullet u) - 2(v \bullet v)(u \bullet v)^2 + (u \bullet v)^2(v \bullet v)$$

luego

$$0 \leq (v \bullet v)^2(u \bullet u) - (v \bullet v)(u \bullet v)^2 \qquad (\beta)$$

multiplicando en ambos miembros de la desigualdad (β) por $\dfrac{1}{v \bullet v}$ ya que *v* es no nulo, resulta

$$0 \leq (v \bullet v)(u \bullet u) - (u \bullet v)^2\ .$$

ahora, sumando en ambos miembros de la desigualdad $(u \bullet v)^2$, se obtiene

$$(u \bullet v)^2 \leq (v \bullet v)(u \bullet u)$$

aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad resulta,

$$\sqrt{(u \bullet v)^2} \leq \sqrt{(v \bullet v)(u \bullet u)}\ .$$

Por propiedad de valor absoluto y como los radicandos del segundo miembro son no negativos se tiene,

$$|u \bullet v| \leq \sqrt{v \bullet v}\ \sqrt{u \bullet u}$$

o bien

$$|u \bullet v| \leq \sqrt{u \bullet u}\ \sqrt{v \bullet v}$$

Q.E.D.

NORMA

Definición 4

Sea V un espacio vectorial euclídeo, y sea la función "doble barra"

$$\| \ \|: \quad V \to R$$
$$u \mapsto \|u\|$$

La función $\| \ \|$ es una ***norma*** si y sólo si verifica los siguientes axiomas:

Ax.1. $\forall \ u \in V \ ; \quad \|u\| \geq 0 \ \wedge$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$$

Ax.2. $\forall \ a \in R, \ \forall \ u \in V; \ \ \|au\| = |a| \ \|u\|$

Ax.3. $\forall \ u, v \in V; \ \ \|u+v\| \ \leq \ \|u\| \ + \ \|v\|$. Conocida como desigualdad triangular.

ESPACIO VECTORIAL NORMADO

Definición 5

Un espacio vectorial ***normado*** es un espacio vectorial en el que se encuentra definida una **norma**.

Nota

Todo espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial normado, ya que la norma es inducida por el producto interior definido en V como veremos ahora.

NORMA INDUCIDA POR UN PRODUCTO INTERIOR

Proposición 4

Sea V un espacio vectorial euclídeo, la función definida por

$$\| \ \|: \quad V \to R$$
$$u \mapsto \|u\| \overset{def}{=} \sqrt{u \bullet u}$$

es una norma.

Demostración

En efecto,

i) $\forall \ \ u \in V; \ \ \|u\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

- Cualquiera que sea $u \in V$, se satisface que $u \bullet u \geq 0$, en consecuencia $\sqrt{u \bullet u} \geq 0$ y como $\|u\| = \sqrt{u \bullet u}$, resulta que $\|u\| \geq 0$.

- $u = 0_V \iff u \bullet u = 0 \iff \sqrt{u \bullet u} = 0 \iff \|u\| = 0$.

ii) $\forall\ a \in R,\ \forall\ u \in V;\ \ \|au\| = |a|\ \|u\|$

$$\|au\| \underset{(1)}{=} \sqrt{au \bullet au} \underset{(2)}{=} \sqrt{a(u \bullet au)} \underset{(3)}{=} \sqrt{a^2(u \bullet u)} \underset{(4)}{=} \sqrt{a^2}\sqrt{u \bullet u} \underset{(5)}{=} |a|\ \|u\|$$

Referencias:

(1) Por definición de norma de un vector ($\|\ \|$).

(2) Por Ax. 3 de producto interior.

(3) Por proposición 1.

(4) Por distributividad de la radicación respecto al producto de números reales no negativos.

(5) Por propiedad de valor absoluto de números reales y por definición de norma de un vector.

iii) $\forall\ u, v \in V;\ \ \|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$

En efecto,

$$\|u+v\|^2 \underset{(1)}{=} (u+v) \bullet (u+v) \underset{(2)}{=} u \bullet u + 2(u \bullet v) + v \bullet v =$$

$$\underset{(3)}{=} \|u\|^2 + 2(u \bullet v) + \|v\|^2 \underset{(4)}{\le} \|u\|^2 + 2|u \bullet v| + \|v\|^2 \le$$

$$\underset{(5)}{\le} \|u\|^2 + 2\ \|u\|\ \ \|v\| + \|v\|^2 \underset{(6)}{=} \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$

tomando el primer miembro y el último miembro de la desigualdad se tiene,

$$\|u+v\|^2 \le \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$

aplicando raíz cuadrada en ambos miembros, y como ambos radicandos son potencias de bases no negativas, resulta

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|.$$

Referencias:

(1) Por definición de norma de un vector.

(2) Por la distributividad del producto interior ($\bullet$) respecto de la suma de vectores (+).

(3) Por definición de norma de un vector.

(4) Por propiedad de valor absoluto (todo número real es menor o igual que su valor absoluto).

(5) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(6) Por definición de trinomio cuadrado perfecto.

Q.E.D.

Ejemplos

En el espacio vectorial euclídeo R^n, con $n \in \boldsymbol{N}$ y donde el producto interior es el producto escalar, si $u=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\in R^n$, entonces la norma de u *está dada por* :

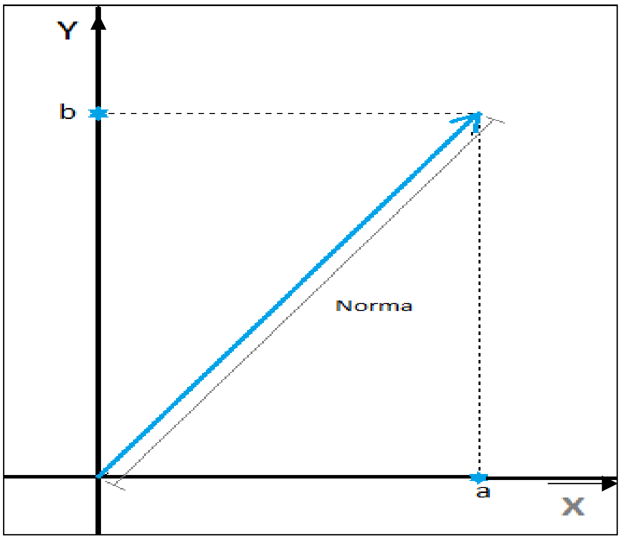
$$\boxed{\parallel u \parallel = \sqrt{u \bullet u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA NORMA DE UN VECTOR EN EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbf{R^2}$

Ejemplo

En el espacio vectorial euclídeo R^2 donde el producto interior considerado es el ***producto escalar***. Si $u=(a,b)\in \boldsymbol{R^2}$, entonces la norma de u inducida por el producto escalar viene dada por

$$\parallel u \parallel = \sqrt{u \bullet u} = \sqrt{a^2+b^2}$$



Geométricamente, es evidente que la norma del vector u es la longitud del vector u.

Nota: La longitud del vector u suele nombrarse como *"**el módulo del vector u**"*

PARALELISMO

Definición 6

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sean $u,v\in V_F$ con $u\neq 0_V, v\neq 0_V$.

El vector u es paralelo al vector v si y sólo si existe un escalar no nulo c tal que $u=cv$.

En símbolos,

$$\boxed{u \parallel v \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, c\in F \ \wedge\ c\neq 0:\ u=cv}$$

Ejemplo

Sea el espacio vectorial real R^2 y sean $u=(1,-2)$ y $v=(-2,4)$ vectores de R^2. Es claro que u es paralelo al vector v pues,

$$\exists\ c=-\frac{1}{2}\in \boldsymbol{R}-\{0\}:\ \ (1,-2)=-\frac{1}{2}(-2,4)$$

Notas

1.- El paralelismo de vectores es una relación de equivalencia, es decir que es:

- Reflexiva: "todo vector es paralelo a sí mismo"
- Simétrica: "si un vector *u* es paralelo a otro vector *v* entonces el vector *v* es paralelo al vector *u*"
- Transitiva: "si un vector *u* es paralelo a un vector *v* y éste es paralelo a un vector *w*, entonces el vector *u* es paralelo al vector *w*".

2.- Cuando un vector *u* sea paralelo a un vector *v*, diremos simplemente que **"*u* y *v* son paralelos"**, esto se debe a que el paralelismo de vectores es una relación simétrica.

3.- Decir que "dos vectores son paralelos" equivale a decir que "uno cualquiera de ellos es combinación lineal del otro" o bien que "uno cualquiera de ellos es un múltiplo escalar del otro"

ORTOGONALIDAD

Definición 7

Sea *V* un espacio vectorial euclídeo y sean *u*, *v* vectores **no nulos** de *V*. Diremos que *u* es ortogonal a *v* si y sólo si el producto interior de *u* y *v* es igual a cero.

En símbolos:

$$\boxed{u\perp v\ \overset{def}{\Leftrightarrow}\ u\bullet v=0}$$

Convención

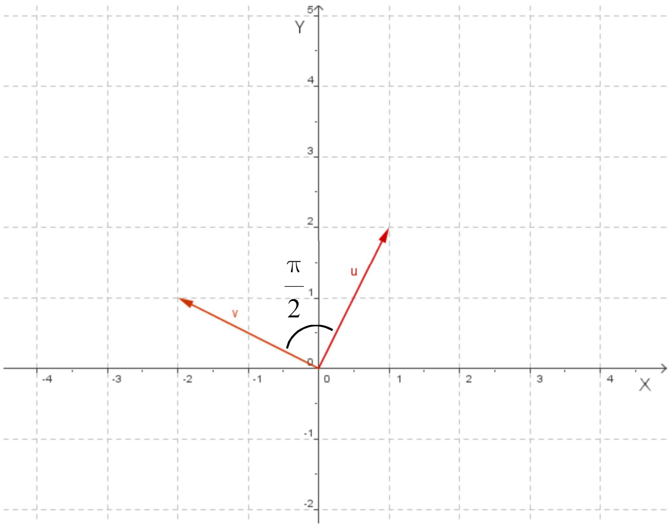
Como $\forall u\in V;\quad u\bullet 0_V=0_V\bullet u=0$, convenimos en que "el vector nulo 0_V es ortogonal a todo vector de *V*".

Ejemplo

Sea el espacio vectorial euclídeo R^2, donde el producto interior es el producto escalar. Sean los vectores $u=(1,\ 2)$, $\quad v=(-2,\ 1)$. Es claro que *u* y *v* son ortogonales, pues

$$u\bullet v=(1,\ 2)\bullet(-2,\ 1)=-2+2=0$$

En la siguiente figura se observa que *u* y *v* son ortogonales, es decir que la medida del ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$



Nota

La ortogonalidad de vectores es una relación simétrica. Por lo tanto cuando un vector u sea ortogonal a un vector v, diremos simplemente que "u y v son ortogonales"**.**

Definición 8

Sea V un espacio vectorial normado. Un vector $u \in V$ es ***unitario*** si y sólo si la norma de u es igual a 1.

VERSOR DE UN VECTOR

Definición 9

Sea V un espacio vectorial normado y sea u un vector **no nulo** de V. Se llama ***versor del vector u*** al vector $\frac{1}{\| u \|} u$.

PROPIEDADES DEL VERSOR DE UN VECTOR

Sea V un espacio vectorial normado y sea u un vector **no nulo** de V. El versor del vector no nulo u tiene las siguientes propiedades:

i) Es unitario. En efecto,

$$\left\| \frac{1}{\| u \|} u \right\| = \left| \frac{1}{\| u \|} \right| \| u \| = \frac{1}{\| u \|} \| u \| = 1$$

ii) Es paralelo al vector u, puesto que es una combinación lineal de éste, es decir es un múltiplo escalar del vector u.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial euclídeo R^3, donde el producto interior es el producto escalar.

El vector $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5},\ 0\right)$ es el versor del vector $u = (3,-4, 0) \in R^3$.

El vector $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es el versor del vector $u = (1, -1, 1) \in R^3$.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial euclídeo R^n, con el producto escalar. Y sea la base canónica $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ del espacio vectorial R^n, donde

$E_1 = (1,\ 0,\ ...,\ 0),\ \ E_2 = (0,\ 1,\ ...,\ 0),\ \ \ldots\ ,\ \ E_n = (0,\ 0,\ ...,\ 1)$.

Es fácil probar que, cualquiera sea $n \in$ ***N***, la base B goza de las siguientes propiedades

i) los vectores de B son unitarios, es decir $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$; $\|E_i\| = 1$

ii) los vectores distintos de B son ortogonales entre sí, es decir $E_i \bullet E_j = 0$, si $i \neq j$

Nota

A los vectores de la base canónica de R^n se les llama "***versores fundamentales***".

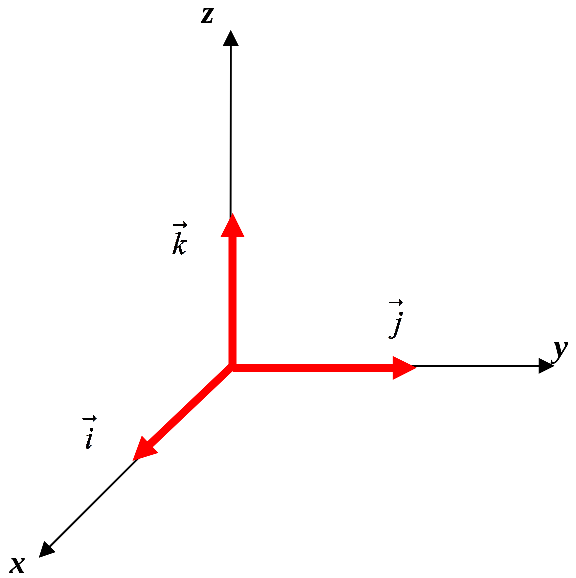
Ejemplo

En el espacio vectorial euclídeo R^3 los versores fundamentales son

(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y se los suele designar con $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ respectivamente, esto es,

$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ constituyen un sistema muy importante de vectores unitarios, que tienen por direcciones las correspondientes a los ejes (en su dirección positiva) del sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el espacio tridimensional R^3.



Todo vector $(x, y, z) \in R^3$ se puede expresar como

$$(x, y, z) = x\ (1,0,0) + y\ (0,1,0) + z\ (0,0,1) = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

MÉTRICA

Definición 10

Sea E un conjunto no vacío. Y sea la función:

$$\begin{aligned} d: E \times E &\to R \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

La función ***d*** es una métrica si y sólo si verifica los siguientes axiomas:

I. $\forall\ x,\ y \in E;\ d(x,y) \geq 0$

II. $\forall\ x,\ y \in E;\ d(x,y) = 0 \iff x = y$

III. $\forall\ x,\ y \in E;\ d(x,y) = d(y,x)$

IV. $\forall\ x,\ y,\ z \in E;\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Definición 11

Todo conjunto no vacío E, donde está definida una métrica d se denomina ***Espacio Métrico*** y se denota con el par (E, d) y el símbolo $d(x, y)$ se lee "*distancia de x a y*".

Notas

1.- Todo espacio vectorial normado es un espacio vectorial métrico.

2.- La función distancia es una relación simétrica por el Axioma III. Es por eso que, en vez de decir "$d(x, y)$ es la distancia de x a y" diremos simplemente que "$d(x, y)$ es la distancia entre x e y".

MÉTRICA INDUCIDA POR LA NORMA

Sea V un espacio vectorial normado. Si se define:

$$\begin{aligned} d: V \times V &\to R \\ (u,v) &\mapsto d(u,v) \overset{def}{=} \|v-u\| \end{aligned}$$

Es fácil ver que la función d cumple todos los axiomas de métrica, luego d es la métrica inducida por la norma, y $d(u,v)$ es la distancia entre los vectores u y v.

Ejemplo

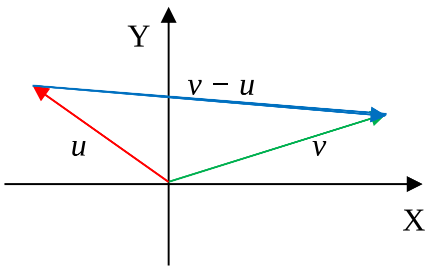
En el espacio vectorial euclídeo R^n, en donde el producto interior es el producto escalar y la norma es la inducida por el producto escalar. La métrica inducida por la norma es la función

$$d: \; R^n \times R^n \to R \text{ definida por}$$

$$d(u,v) = \|v-u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

donde $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DISTANCIA EN EL ESPACIO EUCLÍDEO $\boldsymbol{R^2}$



La distancia entre *u* y *v* es la longitud del vector *v* – *u*.

Ejemplos

a) Sea el espacio vectorial euclídeo R^2, donde el producto interior es el producto escalar. Sean $u = (3,\ 1)$ y $v = (1,\ 4)$ vectores de R^2. Entonces la distancia del vector *u* al vector *v* se calcula como sigue:

$$d\,(u,v) = \|v-u\| = \|(-2,\ 3)\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,.$$

b) Sea el espacio vectorial euclídeo R^3, donde el producto interior es el producto escalar. Sean $u = (1, -2, 1)$ y $v = (4, 2, 1)$ vectores de R^3. Entonces la distancia del vector *u* al vector *v* es,

$$d\,(u,v) = \|v-u\| = \|(3,\ 4,\ 0)\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

Proposición 4

Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean *u*, *v* vectores **no nulos** de *V*. Entonces existe y es único $\alpha \in [0,\pi]$ tal que:

$$\cos\alpha = \frac{u \bullet v}{\|u\|\ \|v\|}$$

Demostración

Por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$\forall\, u,v \in V; \quad |u \bullet v| \;\leq\; \|u\|\;\|v\|$$

en particular,

$$\forall\; u,v \;\in\; V-\{0_V\};\; |u \bullet v| \;\leq\; \|u\|\;\|v\| \;\underset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\; \forall\; u,v \;\in\; V-\{0_V\};\; -\|u\|\;\|v\| \;\leq\; u \bullet v \;\leq\; \|u\|\;\|v\| \;\underset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\; \forall\; u,v \;\in\; V-\{0_V\};\; -\frac{\|u\|\;\|v\|}{\|u\|\;\|v\|} \leq \frac{u \bullet v}{\|u\|\;\|v\|} \;\leq\; \frac{\|u\|\;\|v\|}{\|u\|\;\|v\|} \;\underset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\; \forall\; u,v \;\in\; V-\{0_V\};\; -1 \;\leq\; \frac{u \bullet v}{\|u\|\;\|v\|} \;\leq\; 1$$

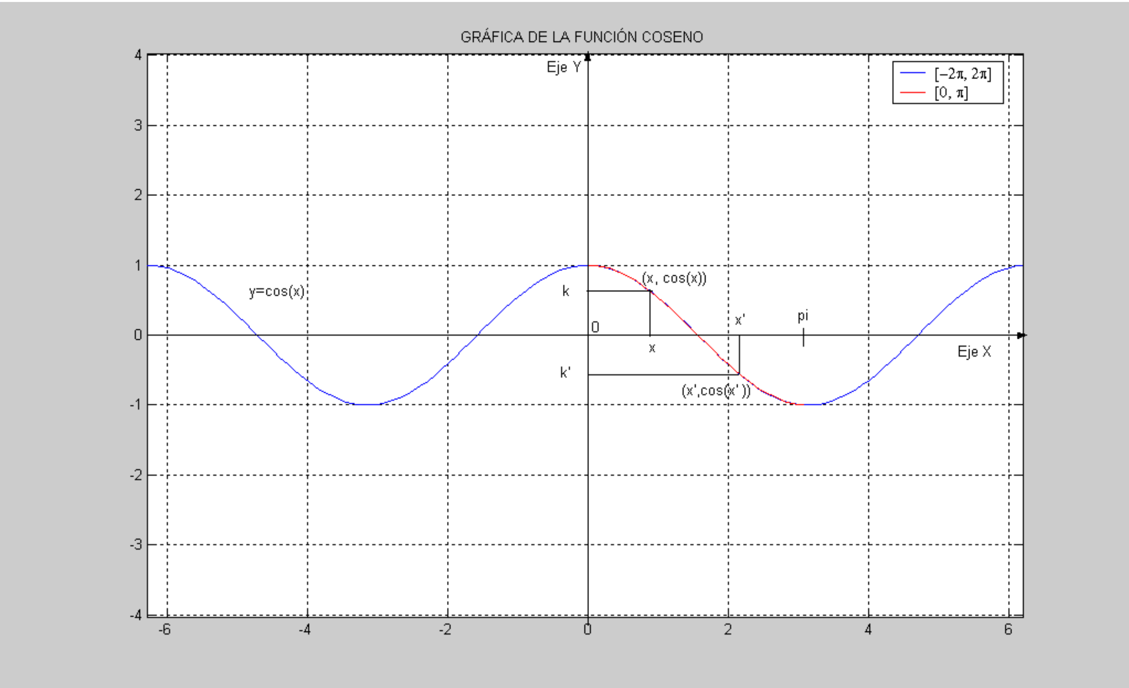
llamando $\qquad k = \dfrac{u \bullet v}{\|u\|\;\|v\|}$

se tiene $\qquad -1 \leq\; k \;\leq 1.$

Se observa entonces que, cualesquiera sean $u \neq 0_V \wedge v \neq 0_V$, el número $k = \dfrac{u \bullet v}{\|u\|\;\|v\|}$ conseguido en base a estos vectores es un número real perteneciente al intervalo [-1, 1].

Por lo tanto, dado $k \in$ [-1, 1], existe un número $\alpha \in R$ tal que $k = \cos\alpha$.

Y como la función coseno en el intervalo $[0, \pi]$ es inyectiva, como podemos ver en la gráfica



Se puede asegurar que, dado $k \in [-1, 1]$, existe un único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos\alpha = k$.

Con esto, se ha probado que

$$\forall\ u, v \in V - \{0_V\};\ \exists!\ \alpha \in [0, \pi] : \cos\alpha = \frac{u \bullet v}{\|u\|\ \|v\|}$$

Referencias:

(1) Por propiedad de valor absoluto.

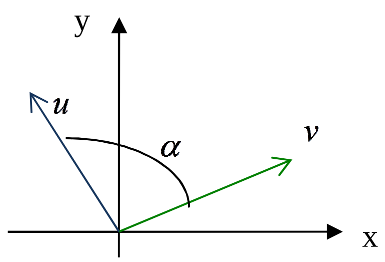
(2) Multiplicando en cada miembro por $\dfrac{1}{\|u\|\ \|v\|}$. Esto se puede hacer porque $\|u\|\ \|v\| \neq 0$, pues $u \neq 0_V \wedge v \neq 0_V$.

(3) Simplificando en ambos miembros

Q.E.D.

Definición 12

Se denomina "el ángulo entre los vectores u y v" al único número real $\alpha \in [0, \pi] : \cos\alpha = \dfrac{u \bullet v}{\|u\|\ \|v\|}$.



DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN VECTORES ORTOGONALES

Sea el espacio vectorial euclídeo R^n. Sea la base canónica $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ del espacio vectorial R^n, donde

$E_1 = (1, 0, ..., 0)$, $E_2 = (0, 1, ..., 0)$, $\ldots$, $E_n = (0, 0, ..., 1)$.

Si $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ entonces el vector u se puede expresar como una única combinación lineal de vectores de la base canónica B, en la que las coordenadas de u son sus respectivas componentes, esto es

$$u = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + a_n E_n$$

En el caso en que

$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; $a_i \neq 0$,

se verifica entonces $\forall\, i \neq j$; $(a_i\, E_i) \bullet (a_j\, E_j) = 0$

de aquí se puede decir que "*todo vector* $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$, (con $a_i \neq 0$, $\forall i$) *se puede descomponer como suma de vectores ortogonales entre sí*"

Ejemplo

En el espacio vectorial euclídeo R^3 consideremos la base canónica

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Sea un vector no nulo $u = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$. Expresamos a u en términos de la base canónica del siguiente modo

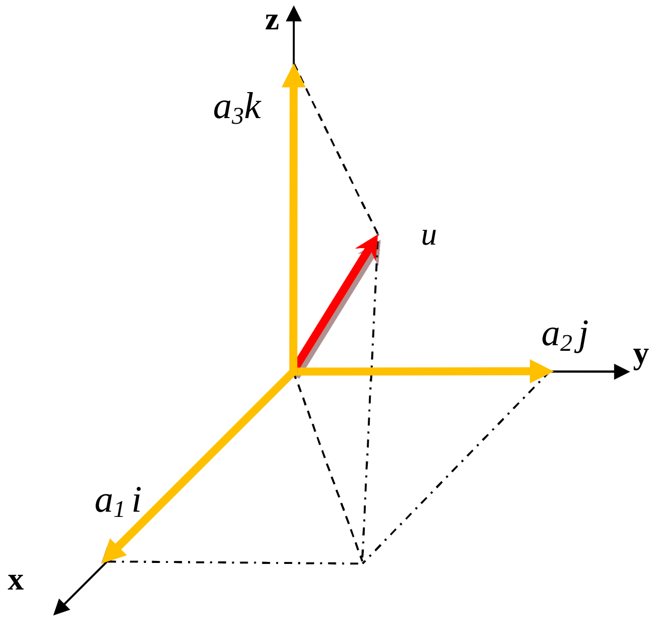
$$u = (a_1, a_2, a_3) = a_1\,(1, 0, 0) + a_2\,(0, 1, 0) + a_3\,(0, 0, 1)$$

recordando que los versores fundamentales de la base canónica son designados por

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \text{y} \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

por lo que también es usual expresar al vector u de esta otra manera

$$u = (a_1, a_2, a_3) = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$



ÁNGULOS Y COSENOS DIRECTORES

Definición 13

Sea el espacio vectorial euclídeo R^n. Sea la base canónica $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ del espacio vectorial R^n, donde

$$E_1 = (1,\ 0,\ ...,\ 0),\ \ E_2 = (0,\ 1,\ ...,\ 0),\ \ \ldots\ ,\ \ E_n = (0,\ 0,\ ...,\ 1)\,.$$

Sea un vector no nulo $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$. Llamaremos ***ángulos directores*** del vector u a los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entre u y cada uno de los versores fundamentales $E_1, E_2, \ldots, E_n$ respectivamente.

Además a los números reales cos α_1, cos α_2 , … , cos α_n les llamaremos cosenos directores del vector u.

Buscaremos una expresión que nos permita calcular los cosenos directores de un vector no nulo de R^n en forma inmediata.

Supongamos que $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un vector no nulo de $\boldsymbol{R^n}$. Llamemos

α_1 al ángulo entre u y E_1

α_2 al ángulo entre u y E_2

…

α_n al ángulo entre u y E_n

De acuerdo con la definición de ángulo entre dos vectores, se satisface

$$\cos\alpha_1 = \frac{u \bullet E_1}{\|u\|\ \|E_1\|} = \frac{a_1}{\|u\|} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \|u\|\cos\alpha_1$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{u \bullet E_2}{\|u\|\ \|E_2\|} = \frac{a_2}{\|u\|} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \|u\|\cos\alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\cos\alpha_n = \frac{u \bullet E_n}{\|u\|\ \|E_n\|} = \frac{a_n}{\|u\|} \quad \Rightarrow \quad a_n = \|u\|\cos\alpha_n$$

Luego

$$u = (a_1, a_2, ..., a_n) \ = \ \|u\|\ (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n)\,.$$

Observación

Todo vector unitario de R^n tiene como componentes a sus cosenos directores. En efecto, si el vector $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ es unitario, es decir $\|u\| = 1$ entonces

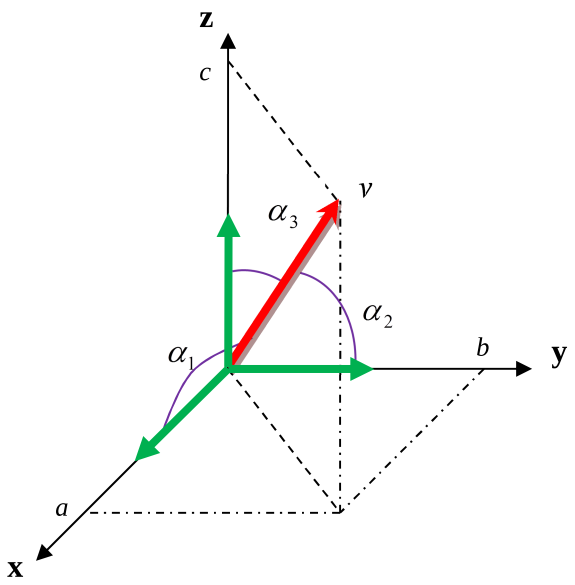
$$u = (a_1, a_2, ..., a_n) = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n)$$

es decir que

$$a_1 = \cos\alpha_1, \;\; a_2 = \cos\alpha_2, \;\; \ldots, \;\; a_n = \cos\alpha_n,$$

Ejemplo

En R^3 se tiene $u = (a,b,c)$, sus ángulos directores son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.



Ejercicio

Determine los ángulos directores del vector *u* = (1, 0, -1) perteneciente al espacio euclídeo R^3

Proposición 5

Sea el espacio vectorial R^n con el producto escalar y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ángulos directores de un vector no nulo $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Entonces se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = 1$$

Demostración

Si $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sus ángulos directores, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + ... + \cos^2 \alpha_n \,.$$

por el resultado anterior

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{\|u\|}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{a_2}{\|u\|}$$

$$\vdots$$

$$\cos \alpha_n = \frac{a_n}{\|u\|}$$

Se tiene entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = \frac{a_1{}^2}{\|u\|^2} + \frac{a_2{}^2}{\|u\|^2} + ... + \frac{a_n{}^2}{\|u\|^2} = \frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_n{}^2}{\|u\|^2}$$

Por definición de norma

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2}$$

luego

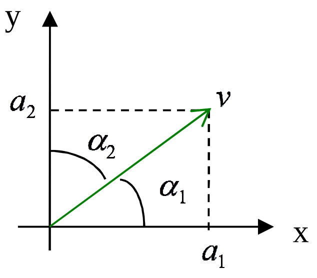
$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = 1 \,.$$

Q.E.D.

<u>La relación Pitagórica como caso particular de la proposición 5</u>

En R^2, sea $v = (a_1, a_2)$. Y sean α_1, α_2 sus ángulos directores, entonces según la proposición 5:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1 \,. \qquad ①$$



pero cualquiera sea $v \in R^2$, si los ángulos directores son complementarios, es decir si

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

se verifica

$$\cos\alpha_1 = \operatorname{sen}\alpha_2$$
$$\cos\alpha_2 = \operatorname{sen}\alpha_1$$

y remplazando en ①, se tiene

$$\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2 = 1$$

Comprobamos con esto, que de la propiedad $\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i = 1$, se puede deducir la conocida Identidad Pitagórica

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE OTRO VECTOR

Definición 14

Sea V un espacio vectorial euclídeo, y sean u y v dos vectores de V con v no nulo. La proyección de u sobre v se define como el vector

$$\operatorname{proy}_v u \overset{def}{=} \frac{u \bullet v}{\|v\|^2} v$$

Propiedades

I. $proy_v u \parallel v$.

II. $proy_v u$ tiene el mismo sentido de v si $u \bullet v > 0$.

III. $proy_v u$ tiene sentido contario de v si $u \bullet v < 0$.

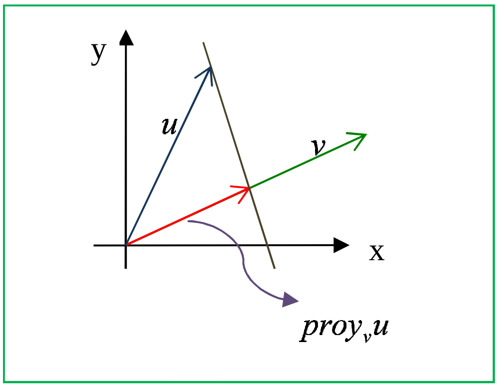
IV. $proy_v u$ es el vector nulo si $u \bullet v = 0$, es decir si $u \perp v$.

V. $w = u - proy_v u$ es ortogonal a *v*.

Ejercicio demuestre la Propiedad V precedente.

Vizualización del concepto

Sea el espacio vectorial euclídeo R^2 y sean *u* y *v* dos vectores no nulos de R^2



Ejercicio

Determine la proyección del vector *u* = (2, 3) sobre el vector *v* = (1, 1) de R^2 y grafique.

CONJUNTO ORTOGONAL DE VECTORES

Definición 15

Sea *V* un espacio vectorial euclídeo y sea $S \subset V \quad \wedge \quad S \neq \varnothing$.

Diremos que *S* es un conjunto ortogonal de vectores si y sólo si sus vectores son mutuamente ortogonales. En símbolos,

S es ortogonal $\Leftrightarrow \left(i \neq j \Rightarrow u_i \bullet u_j = 0 \right)$,

Ejercicio

Verifique que el conjunto S = {(-1,1), (1, 1)} es un conjunto ortogonal de R^2 con el producto escalar.

CONJUNTO ORTONORMAL DE VECTORES

Definición 16

Sea V un espacio vectorial euclídeo y sea $S \subset V \quad \wedge \quad S \neq \varnothing$.

Diremos que S es un conjunto ortonormal de vectores si y sólo si sus vectores son mutuamente ortogonales y unitarios.

En símbolos

$$S \text{ es ortonormal } \Leftrightarrow \begin{cases} i \neq j \quad \Rightarrow \quad u_i \bullet u_j = 0 \\ \forall\, i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n: \ \|u_i\| = 1 \end{cases}$$

Ejemplo

La base canónica del espacio vectorial euclídeo $(R^3, \bullet)$, es un conjunto ortonormal.

COMPLEMENTO ORTOGONAL

Definición 17

Sea V un espacio vectorial euclídeo y sea S un subespacio vectorial de V. Llamaremos ***complemento ortogonal*** de S al conjunto:

$S^{\perp} = \{v \in V \,/\, v \bullet u = 0,\ \ u \in S\}$

Propiedades

El complemento ortogonal es un subespacio vectorial de V. En símbolos

$S^{\perp} \prec V$.

Es decir

I. $S^{\perp} \subset V$

II. $S^{\perp} \neq \varnothing$

III. $v_1, v_2 \in S^{\perp} \Rightarrow v_1 + v_2 \in S^{\perp}$

IV. $a \in F, v \in S^{\perp} \Rightarrow a\ v \in S^{\perp}$

La demostración queda para el estudiante.

NORMALIZACIÓN DE UN CONJUNTO ORTOGONAL

Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos. Entonces el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\|u_1\|} u_1,\ \frac{1}{\|u_2\|} u_2,\ \ldots, \frac{1}{\|u_n\|}\ u_n \right\}$$

Es un conjunto ortogonal y sus vectores son unitarios por ser versores de los vectores de *S*; luego es un conjunto ortonormal.

Proposición 6

Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Demostración

Sea $S \subset V \;\; \wedge \;\; S \neq \varnothing$, y *S* es un conjunto ortogonal de vectores no nulos.

Supongamos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0_V \qquad (\text{con } a_i \in F \wedge u_i \in S)$$

es decir

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0_V$$

- Operando con el producto interior en ambos miembros con u_1

$$(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) \bullet u_1 = 0_V \bullet u_1 \Rightarrow$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} (a_1u_1)\bullet u_1 + (a_2u_2)\bullet u_1 + \ldots + (a_nu_n)\bullet u_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} a_1(u_1 \bullet u_1) + a_2\underbrace{(u_2 \bullet u_1)}_{=0} + \ldots + a_n\underbrace{(u_n \bullet u_1)}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} a_1\underbrace{(\underbrace{u_1}_{\neq 0_V} \bullet u_1)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Referencias:

(1) Por Ax.2 de producto interior.

(2) Por Ax.3 de producto interior.

(3) Por Ax.4 de producto interior.

- Operando con el producto interior en ambos miembros con u_2

$$(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n)\bullet u_2 = 0_V \bullet u_2 \Rightarrow$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} (a_1u_1)\bullet u_2 + (a_2u_2)\bullet u_2 + \ldots + (a_nu_n)\bullet u_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} a_1\underbrace{(u_1 \bullet u_2)}_{=0} + a_2(u_2 \bullet u_2) + \ldots + a_n\underbrace{(u_n \bullet u_2)}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} a_2\underbrace{(\underbrace{u_2}_{\neq 0_V} \bullet u_2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

Referencias:

(1) Por Ax.2 de producto interior.

(2) Por Ax.3 de producto interior.

(3) Por Ax.4 de producto interior.

Se procede de manera análoga hasta llegar al último vector u_n

- Operando con el producto interior en ambos miembros con u_n

$$
\begin{aligned}
&(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n)\bullet u_n = 0_V \bullet u_n \;\Rightarrow \\
&\underset{(1)}{\Rightarrow}\; (a_1u_1)\bullet u_n + (a_2u_2)\bullet u_n + \ldots + (a_nu_n)\bullet u_n = 0 \;\Rightarrow \\
&\underset{(2)}{\Rightarrow}\; a_1\underbrace{(u_1\bullet u_n)}_{=0} + a_2\underbrace{(u_2\bullet u_n)}_{=0} + \ldots + a_n(u_n\bullet u_n) = 0 \;\Rightarrow \\
&\underset{(3)}{\Rightarrow}\; a_n\underbrace{(\underbrace{u_n}_{\neq 0_V}\bullet u_n)}_{\neq 0} = 0 \;\Rightarrow\; a_n = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el conjunto S es linealmente independiente.

Referencias:

(1) Por Ax.2 de producto interior.

(2) Por Ax.3 de producto interior.

(3) Por Ax.4 de producto interior. **Q.E.D.**

Otra forma de realizar la demostración es la siguiente

Sea

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_iu_i + \ldots + a_nu_n = 0_V$$

En forma general operando con el producto interior en ambos miembros con u_i, $\forall i = 1,\ldots,n;$ tenemos

$$\forall i = 1,\ldots,n;\; (a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_iu_i + \ldots + a_nu_n)\bullet u_i = 0_V \bullet u_i \;\Rightarrow$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow}\; \forall i = 1,\ldots,n;\; (a_1u_1)\bullet u_i + (a_2u_2)\bullet u_i + \ldots + (a_iu_i)\bullet u_i + \ldots + (a_nu_n)\bullet u_i = 0 \;\Rightarrow$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} \forall i = 1,\ldots,n;\; a_1(u_1\bullet u_i) + a_2(u_2\bullet u_i) + \ldots + a_i(u_i\bullet u_i) + \ldots + a_n(u_n\bullet u_i) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow}\; \forall i = 1,\ldots,n;\; a_i\underbrace{(\underbrace{u_i}_{\neq 0_V}\bullet u_i)}_{\neq 0} = 0$$

luego

$$a_i = 0; \quad \forall i = 1, \ldots, n .$$

en consecuencia el conjunto S es linealmente independiente.

Referencias:
(1) Por Ax.2 de producto interior.
(2) Por Ax.3 de producto interior.
(3) Por Ax.4 de producto interior.

Q.E.D.

ORTONORMALIZACIÓN DE UNA BASE

Teorema

Todo espacio vectorial real $V \neq \{0_V\}$ con producto interior y de dimensión finita n (con n ≥ 2), admite una base ortonormal.

Demostración

Sabemos que todo espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ admite al menos una base, por lo tanto podemos tomar una base cualquiera de *V*.

Sea $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \ \ldots \ , v_n\}$ una base de *V*.

A partir de esta base construiremos vectores $w_1, w_2, \ \ldots \ , w_n$ empleando el conocido **Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt,** del siguiente modo:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2$$

.

.

.

$$w_n = v_n - \frac{v_n \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_n \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2 - \ldots - \frac{v_n \bullet w_{n-1}}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}$$

Es decir

$$\boxed{\forall \ \ i = 1, 2, \ldots, n \ ; \quad w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_i \bullet w_j}{\|w_j\|^2} w_j} \qquad (\alpha)$$

Sea $\mathscr{C}$ el conjunto formado por esos vectores, esto es

$$\mathscr{C} = \{w_1, w_2, \ \ldots \ , \ w_n\}.$$

Probaremos que el conjunto $\mathscr{C}$ es un **conjunto ortogonal de vectores no nulos.**

En efecto, todos los vectores de $\mathscr{C}$ son no nulos, es decir

$$\boxed{\forall\ i = 1, 2, \ \dots\ , n; \ \ w_i \neq 0_V.} \qquad (\beta)$$

Esto es así ya que por el contrario, si existe $i \in \{1, 2, \ \dots\ , n\}$ tal que $w_i = 0_V$, entonces reemplazando en (α) y luego despejando v_i se tiene

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_i \bullet w_j}{\|w_j\|^2}\ w_j$$

es decir, v_i es combinación lineal de los anteriores vectores $v_1, v_2, \ . \ . \ . \ , v_{i-1}$ de la base dada $\mathscr{B}$, y esto es una **contradicción**, ya que ningún vector de $\mathscr{B}$ puede ser combinación lineal de los restantes, puesto que $\mathscr{B}$ es linealmente independiente. Luego la proposición (β) resulta es verdadera.

Ahora, probaremos que cada vector de $\mathscr{C}$ es ortogonal a los anteriores vectores. Es decir, probaremos que es verdadera la siguiente proposición:

$$\boxed{\forall\ m \in \mathbf{N} \wedge m \geq 2 \ ; \ w_m \text{ es ortogonal a } w_j \text{ con } j = 1, 2, \dots , m\text{-}1} \ (\delta)$$

Para ello emplearemos el Principio de Inducción Matemática.

i) Si $m = 2$, entonces

$$w_2 \bullet w_1 = \left(v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2}\ w_1 \right) \bullet w_1 = (v_2 \bullet w_1) - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2}\ (w_1 \bullet w_1) = 0$$

es decir la proposición (δ) es verdadera para $m = 2$

ii) Demostraremos ahora que: si la proposición (δ) es verdadera para $m = k$, entonces la proposición (δ) es verdadera para $m = k + 1$.

Supongamos que w_k es ortogonal a w_j, con $j = 1, 2, \dots , k\text{-}1$, esto es lo mismo que decir

$$w_k \bullet w_j = 0 \ \ , \ \forall\ j = 1, 2, \dots , k\text{-}1$$

Tenemos que probar que w_{k+1} es ortogonal a w_j con $j = 1, 2, \dots , k$

$$w_{k+1} \bullet w_j = \left(v_{k+1} - \sum_{h=1}^{k} \frac{v_{k+1} \bullet w_h}{\|w_h\|^2} w_h \right) \bullet w_j \qquad (1)$$

$$w_{k+1} \bullet w_j = (v_{k+1} \bullet w_j) - \sum_{h=1}^{k} \frac{v_{k+1} \bullet w_h}{\|w_h\|^2} (w_h \bullet w_j) \qquad (2)$$

$$w_{k+1} \bullet w_j = (v_{k+1} \bullet w_j) - \frac{v_{k+1} \bullet w_j}{\|w_j\|^2} (w_j \bullet w_j) \qquad (3)$$

$$w_{k+1} \bullet w_j = (v_{k+1} \bullet w_j) - (v_{k+1} \bullet w_j) \qquad (4)$$

$$w_{k+1} \bullet w_j = 0$$

Referencias

(1) Teniendo en cuanta la construcción de los vectores dada en (α)

(2) Por la distributividad del producto interior respecto a la resta de vectores

Por la distributividad del producto interior respecto a la suma finita de vectores

Por axioma de producto interior

(3) Como j y h son tales que $1 \leq j \leq k \wedge 1 \leq h \leq k$, entonces por hipótesis inductiva se tiene que $(w_h \bullet w_j) = 0$ si $h \neq j$. Además $(w_h \bullet w_j) \neq 0$ si $h = j$

ya que todos los vectores los vectores son no nulos.

(4) Por definición de norma de un vector

Por lo tanto, hemos probado que $\mathscr{C} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos.

Ahora bien, teniendo en cuenta que "Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente" resulta que $\mathscr{C}$ es linealmente independiente, además $\mathscr{C}$ tiene *n* vectores del espacio V (con dim V = *n*) por lo tanto $\mathscr{C}$ es una base ortogonal de V.

Finalmente, si se normaliza la base ortogonal $\mathscr{C}$, es decir si se toma el versor de cada vector de $\mathscr{C}$ se obtiene el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\|w_1\|} w_1 , \frac{1}{\|w_2\|} w_2 , \ldots , \frac{1}{\|w_n\|} w_n \right\}$$

el cuál es una base ortonormal de V.