ÁLGEBRA LINEAL

Ingenierías

ÁLGEBRA II

LM - PM

Unidad Nº 5

Transformaciones Lineales

FCEyT - UNSE

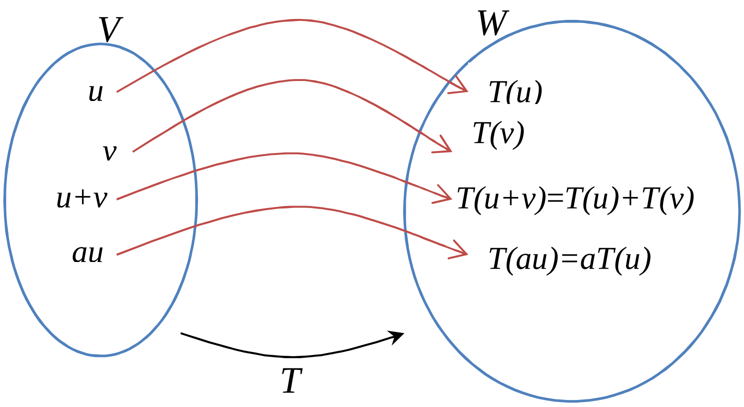
Unidad Nº 5: TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F, y sea una función $T:V \to W$. La función T es una ***Transformación Lineal*** de V en W si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

i) $\forall u, v \in V; T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) $\forall a \in F \wedge \forall u \in V; T(au) = aT(u)$



PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Proposición 1

Si $T:V \to W$ una transformación lineal entonces $T(0_V) = 0_W$

Demostración

Por propiedad de espacios vectoriales se verifica que

$$\forall u \in V;\ 0_V = 0u\,.$$

Aplicando en ambos miembros T tenemos

$$T(0_V) = T(\underbrace{0}_{\in F}\underbrace{u}_{\in V})$$

$$T(0_V) \underset{(1)}{=} \underbrace{0}_{\in F}\underbrace{T(u)}_{\in W}$$

$$T(0_V) \underset{(2)}{=} 0_W$$

luego

$$T(0_V) = 0_W\,.$$

Referencias:
(1) Por Ax. 2 de definición de transformación lineal.
(2) Por propiedad de espacio vectorial.

Q.E.D.

Proposición 2

Si $T: V \to W$ una transformación lineal entonces

$$\forall u \in V;\ T(-u) = -T(u)$$

Demostración

$$T(-u) = T\left(\underbrace{(-1)}_{\in F}\underbrace{u}_{\in V}\right) \underset{(1)}{=} (-1)T(u) \underset{(2)}{=} -T(u)$$

Luego:

$$T(-u) = -T(u)$$

Referencias:
(1) Por Ax. 2 de definición de transformación lineal.
(2) Por propiedad de espacio vectorial.

Q.E.D.

Proposición 3

Si $T: V \to W$ una transformación lineal entonces

$$\forall a_i \in F, \forall u_i \in V; T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i) \qquad (\alpha)$$

Demostración:

Se demuestra por inducción en n

- $n = 1$

$$T\left(\sum_{i=1}^{1} a_i u_i\right) = T(a_1 u_1) \underset{(1)}{=} a_1 T(u_1) = \sum_{i=1}^{1} a_i T(u_i)$$

Luego la proposición (α) es verdadera para $n = 1$.

- Suponemos que la proposición (α) es verdadera para $n=h$, es decir que

$$T\left(\sum_{i=1}^{h} a_i u_i\right) \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{h} a_i T(u_i)$$

- Bajo este supuesto, probaremos que la proposición (α) es verdadera para $n=h+1$, es decir

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{h+1} a_i T(u_i)$$

En efecto,

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i u_i\right) \underset{(3)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{h} a_i u_i + a_{h+1}u_{h+1}\right) \underset{(4)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{h} a_i u_i\right) + T\left(a_{h+1}u_{h+1}\right) =$$

$$\underset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{h} a_i T(u_i) + a_{h+1}T\left(u_{h+1}\right) \underset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{h+1} a_i T(u_i)$$

Luego la proposición se cumple para todo *n* natural.

Referencias:
1. (1) Por Ax. 2 de transformación lineal.
2. (2) Por Ax. 2 de transformación lineal.
3. (3) Por propiedad de las sumas finitas.
4. (4) Por Ax. 1 de transformación lineal.
5. (5) Por hipótesis inductiva y por Ax. ii) de la definición de transformación lineal.
6. (6) Por propiedad de las sumas finitas.

Q.E.D.

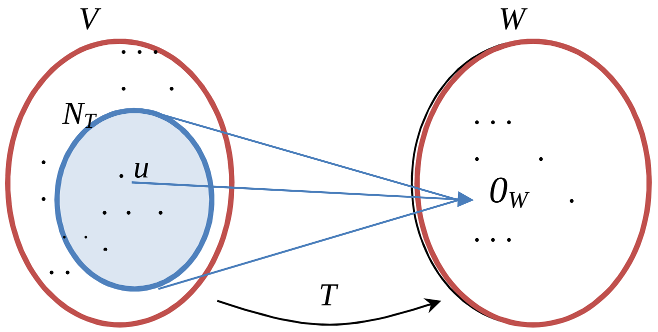
Núcleo de una transformación lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal:

Definición

El ***núcleo*** de *T* es el conjunto de vectores $u \in V$, tales que su imagen es el vector nulo de *W*.
En símbolos:

$$N_T \overset{def}{=} \{u \in V \,/\, T(u) = 0_W\}$$



Es claro que,

$$\boxed{u \in N_T \iff T(u) = 0_W}$$

Propiedades del núcleo de una transformación lineal

Proposición 4

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. El núcleo de *T* es un subespacio vectorial del espacio vectorial *V*.

<u>*Demostración*</u>:

i) $N_T \subset V$ por definición de N_T.

ii) $N_T \neq \varnothing$, pues $0_V \in N_T$ ya que $T(0_V) = 0_W$ por Proposición 1 de transformaciones lineales.

iii) $u, v \in N_T \Rightarrow u + v \in N_T$

En efecto:

$u, v \in N_T \underset{(1)}{\Rightarrow} T(u) = 0_W \wedge T(v) = 0_W$

$T(u+v) \underset{(2)}{=} T(u) + T(v) \underset{(3)}{=} 0_W + 0_W = 0_W \underset{(4)}{\Rightarrow} u + v \in N_T$

Luego $u + v \in N_T$

iv) $a \in F \wedge u \in N_T \Rightarrow au \in N_T$

En efecto:

$a \in F \wedge u \in N_T \underset{(5)}{\Rightarrow} a \in F \wedge T(u) = 0_W$

$T(au) \underset{(6)}{=} aT(u) \underset{(7)}{=} a0_W = 0_W \underset{(8)}{\Rightarrow} au \in N_T$

Luego $au \in N_T$

Por lo tanto por **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)**, el núcleo de T es un subespacio vectorial de de V.

<u>Referencias</u> (A completar por el alumno)

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)

Q.E.D.

<u>***Proposición 5***</u>

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. $N_T = \{0_V\} \Leftrightarrow T$ es inyectiva.

(Sin demostración)

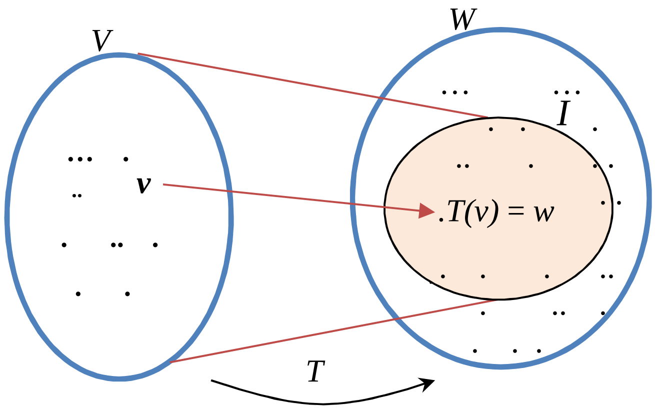
<u>Imagen de una transformación lineal</u>

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal:

<u>***Definición***</u>

La imagen de T es el conjunto de vectores de W, que tienen preimagen en V.
En símbolos:

$$I_T \overset{def}{=} \{ w \in W \,/\, \exists v \in V : T(v) = w \}$$



Es claro que,

$$\boxed{w \in I_T \Leftrightarrow \exists v \in V : T(v) = w}$$

<u>Propiedades de la imagen de una transformación lineal</u>

<u>Proposición 6</u>

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. La imagen de T es un subespacio vectorial de W.

<u>Demostración</u>

i) $I_T \subset W$ por definición de I_T.

ii) $I_T \neq \varnothing$, pues $0_W \in I_T$ ya que por propiedad $\exists\ 0_V \in V : T(0_V) = 0_W$.

iii) $w_1, w_2 \in I_T \Rightarrow w_1 + w_2 \in I_T$

En efecto:

$$w_1, w_2 \in I_T \underset{(1)}{\Rightarrow} \exists v_1, v_2 \in V : T(v_1) = w_1 \wedge T(v_2) = w_2 \Rightarrow$$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} \exists v_1, v_2 \in V : T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} \exists v_1 + v_2 \in V : T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \underset{(4)}{\Rightarrow} w_1 + w_2 \in I_T$$

luego $w_1 + w_2 \in I_T$

iv) $a \in F \wedge w \in I_T \Rightarrow aw \in I_T$

En efecto:

$$a \in F \wedge w \in I_T \underset{(5)}{\Rightarrow} a \in F \wedge \exists v \in V : T(v) = w \Rightarrow$$

$$\underset{(6)}{\Rightarrow} a \in F \wedge \exists v \in V : aT(v) = aw \Rightarrow$$

$$\underset{(7)}{\Rightarrow} \exists av \in V : T(av) = aw \underset{(8)}{\Rightarrow} aw \in I_T$$

luego $aw \in I_T$

Por lo tanto por **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)**, la imagen de T es un subespacio vectorial de de W.

Referencias:
(1) Por definición de imagen de *T*.
(2) Por (+) en *W*.
(3) Por (+) en *V* y por Ax. 1 de transformación lineal.
(4) Por definición de imagen de *T*.
(5) Por definición de imagen de *T*.
(6) Por (.) en *W*.
(7) Por (.) en *V* y por Ax. 2 de transformación lineal.
(8) Por definición de imagen de *T*.

Q.E.D.

Proposición 7

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. $I_T = W \Leftrightarrow T$ es sobreyectiva.

Demostración

El enunciado coincide con la definición de sobreyectividad.

Teorema de las dimensiones del núcleo y la imagen

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y sea *V* de dimensión finita *n,* entonces:

$$\dim N_T + \dim I_T = \dim V$$

Demostración (sin demo para ING)

1) I_T tiene dimensión finita.

Sabiendo que cualquier base de *V* es finita, se deduce que I_T tiene dimensión finita. En efecto si $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente en I_T, entonces existe u conjunto linealmente independiente en *V* $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ tal que:

$$\forall i = 1, ..., r : T(v_i) = w_i .$$

Esto significa que si I_T no tuviera dimensión finita, entonces *V* no tendría dimensión finita.

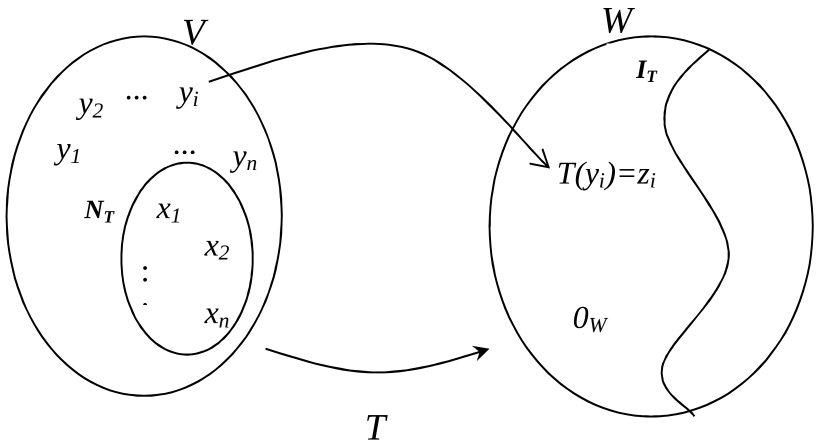
2) Sea $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ una base de N_T.

- Si *n*=*p*, entonces $N_T = V$ y $\dim I_T = 0$, pues en este caso es: $I_T = \{0_V\}$.

- Si $p<n$, entonces, por el teorema de extensión, existen $y_1, y_2, \dots, y_s$ en V, tales que:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_s\}$$

es una base de V.



Se tiene $p+s=n$ y el teorema se reduce a probar que $\dim I_T = s$.

Consideremos las imágenes de los vectores $y_1, y_2, \dots, y_s$; sean éstas:

$$\forall i = 1, \dots, s : T(y_i) = z_i \quad (\zeta).$$

Demostraremos que $\{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ es una base de I_T. En efecto:

i) $\{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ es linealmente independiente.

Sea: $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i z_i = 0_W$

Por (ζ):

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i T(y_i) = 0_W \underset{(1)}{\Rightarrow} T\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i\right) = 0_W \underset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i \in N_T \Rightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j \underset{(4)}{\Rightarrow} \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i = 0_V \Rightarrow$$

$$\underset{(5)}{\Rightarrow} \beta_j = 0 \wedge \alpha_j = 0; \forall i, \forall j.$$

Referencias:

(1) Por proposición 3 de transformaciones lineales.

(2) Por definición de núcleo de T.

(3) $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ es una base de N_T.
(4) Por (+) en *V*.
(5) Por independencia lineal de *A*.

ii) $\{z_1, z_2, ..., z_s\}$ es generador de I_T.

Sea *z* cualquier vector de I_T. Por definición de conjunto imagen se verifica que:

$$z \in I_T \Rightarrow \exists x \in V / T(x) = z \underset{(1)}{\Rightarrow} z = T(x) \wedge x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{s} \beta_i y_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = T\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{s} \beta_i y_i \right) \underset{(2)}{\Rightarrow} z = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j T\left(x_j\right) + \sum_{i=1}^{s} \beta_i T\left(y_i\right) \Rightarrow$$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} z = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j 0_W + \sum_{i=1}^{s} \beta_i z_i \Rightarrow z = \sum_{i=1}^{s} \beta_i z_i$$

Referencias:
(1) Expresando a *x* como combinación lineal de los vectores de la base de *V*.
(2) Por propiedades de transformaciones lineales.
(3) Todo x_j es un elemento del núcleo de *T*.
(4) El producto de cualquier escalar por el vector nulo es el vector nulo.

Luego se verifica que:

$$\dim N_T + \dim I_T = \dim V$$

Q.E.D.

Teorema de existencia y unicidad de las transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo *F*. Si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V y $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ un subconjunto cualquiera de *W*, entonces existe① y es única④ la transformación lineal $T: V \to W$ ② tal que $\forall i = 1,..., n;\ T(v_i) = w_i$ ③.

Demostración

① Construiremos una función T de V en W. Para definir T realizaremos el siguiente razonamiento:

Por hipótesis *B* es una base de *V*, en consecuencia
Si $u \in V$ entonces existen y son únicos los escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ tales que *u* se escribe como combinación lineal de vectores de *B*, esto es

$$u = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i}_{\in F} \underbrace{v_i}_{\in B}$$

Definimos ahora

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \ .$$

Es claro que para cada vector

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ \in \ V$$

existe un único vector

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \ \in \ W$$

debido a la unicidad de las coordenadas $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ de cada vector *u* respecto a la base *B* de *V*.

Por lo tanto queda bien definida la función

$$\begin{aligned} T: \ & V \ \to \ W \\ & u \ \mapsto T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \end{aligned}$$

② Probaremos ahora que la función *T* así definida es una transformación lineal.

i) $u, v \in V \ \Rightarrow \ T(u+v) = T(u) + T(v)$

En efecto,

$$u, \ v \in V \quad \Rightarrow \quad u \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \wedge \quad v \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} b_i \ v_i$$

Con $a_i \in F$, $b_i \in F$ (coordenadas de *u* y *v* respectivamente) y $v_i \in B$; $\forall \ i = 1, 2, \ldots, n$

Ahora obtengamos la imagen del vector $u + v$ a través de la función *T*

$$T(u+v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \right) \underset{(3)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i + b_i v_i) \right) =$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \ v_i \right) \underset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \ w_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i w_i + b_i w_i) =$$

$$\underset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \underset{(6)}{=} T(u) + T(v)$$

<u>Referencias</u>:

(1) Los n escalares a_i son las coordenadas de *u* respecto de la base *B* de *V*.

(2) Los n escalares b_i son las coordenadas de *v* respecto de la base *B* de *V*.

(3) Se aplica propiedad de las sumas finitas y la distributividad del producto por escalares respecto a la suma de escalares en el espacio vectorial *V*. El lector puede probar que los n escalares $a_i + b_i$ son las coordenadas del vector $u+v$ respecto de la base *B* de *V*.

(4) Por definición de la función *T*.

(5) Como W es un espacio vectorial, vale la distributividad del producto por escalares respecto a la suma d escalares. Se aplica también propiedad de las sumas finitas.

(6) Por definición de la función *T*.

ii) $\alpha \in F \wedge u \in V \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha T(u)$

En efecto

$$\alpha \in F \;\wedge\; u \in V \;\Rightarrow\; \alpha \in F \;\wedge\; u \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Obtengamos ahora la imagen a través de la función *T* del vector αu

$$T(\alpha\, u) \;=\; T\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \underset{(2)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i)\, v_i\right) \underset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i)\, w_i =$$

$$\underset{(4)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \underset{(5)}{=} \alpha\, T(u)$$

<u>Referencias</u>:

(1) Los n escalares a_i son las coordenadas de *u* respecto de la base *B* de *V*.

(2) Por distributividad del producto por escalares respecto a la suma de vectores en el espacio vectorial *V*. El lector puede probar que lo n escalares αa_i son las coordenadas del vector αu respecto de la base *B* de *V*.

(3) Por definición de la función *T*.

(4) Por distributividad del producto por escalares respecto a la suma de vectores en es espacio vectorial *W*.

(5) Por definición de la función *T*.

Luego por **i)** y **ii)** la función *T* es una **transformación lineal**.

③ Mostraremos que

$$\forall i = 1,\dots,n;\quad T(v_i) = w_i$$

En efecto, como $\forall i = 1,\dots,n;\quad v_i \in B$ entonces $\forall i = 1,\dots,n;\quad v_i \in V$

por lo tanto existen y son únicos los escalares que permiten escribir a cada vector v_i como combinación de todos los vectores de la base *B* de *V*, esto es

$$\begin{aligned} v_1 &= 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\ v_2 &= 0v_1 + 1v_2 + \ldots + 0v_n \\ &\vdots \\ v_n &= 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 1v_n \end{aligned}$$

Entonces las imágenes de cada uno de los vectores de la base B del espacio vectorial V vienen dadas por,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T\left(1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n\right) \overset{def.\ de\ la\ función T}{=} 1w_1 + 0w_2 + \ldots + 0w_n = w_1 \\ T(v_2) &= T\left(0v_1 + 1v_2 + \ldots + 0v_n\right) \overset{def.\ de\ la\ función T}{=} 0w_1 + 1w_2 + \ldots + 0w_n = w_2 \\ &\vdots \\ T(v_n) &= T\left(0v_1 + 0v_2 + \ldots + 1v_n\right) \overset{def.\ de\ la\ función T}{=} 0w_1 + 0w_2 + \ldots + 1w_n = w_n \end{aligned}$$

luego

$$\forall i = 1, \ldots, n: \ \ T(v_i) = w_i .$$

④ La transformación lineal

$$T : V \to W \ / \ T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \qquad \text{es única.}$$

En efecto, sea $G : V \to W$ una transformación lineal tal que

$$\forall i = 1, \ldots, n: \ \ G(v_i) = w_i .$$

probaremos que $G = T$, que es equivalente a probar que para cada vector u del espacio vectorial V se verifica que la imagen de u a través de G y la imagen de u a través de T son iguales. Esto es,

$$G = T \iff \forall u \in V;\ G(u) = T(u)$$

entonces

$$\forall u \in V;\ G(u) = G\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\, G(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(u)$$

luego $G = T$, es decir T es única.

Referencia:

(1) Por propiedad de las transformaciones lineales.

Q.E.D.

Nota

El Teorema precedente nos muestra que cualquier transformación lineal T de V en W queda unívocamente determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base dada del espacio vectorial V.

<u>Teorema de la matriz asociada a una transformación lineal</u>

Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sea B una base de V y C una base de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una única matriz $A \in F^{mxn}$, tal que

$$\forall x \in V;\ [T(x)]_C = A[x]_B .$$

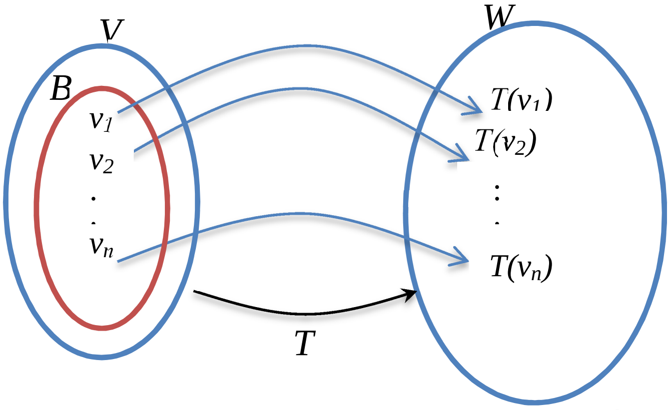
<u>Demostración</u>

a) Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ la base dada de V y sea $C = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ la base dada de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces T está determinada por su efecto sobre los vectores $v_j \in B$ (por el teorema anterior).

Es claro ver que

$T(v_1),\ T(v_2), ...,\ T(v_n) \in W$, donde $v_1, v_2, ..., v_n$; son los vectores de la base B.

$$T : V \to W$$



Luego, cada uno de los n vectores $T(v_j)$ se expresa de manera única como combinación lineal de vectores de la base $C = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ de W. Es decir,

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i$$
$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}w_i$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i$$

Es decir:

$$\forall j = 1,\ldots,n\ ;\ T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \quad (\gamma)$$

Los m escalares a_{ij} son las coordenadas del vector $T(v_j)$ respecto a la base C de W. En consecuencia, las coordenadas de estos vectores respecto de la base C de W son

$$[T(v_1)]_C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\quad [T(v_2)]_C = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \ldots,\ [T(v_n)]_C = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la transformación lineal T está determinada por los mxn escalares a_{ij} a través de la proposición (γ)
La matriz A cuyo elemento genérico es a_{ij} viene dada por

$$\begin{array}{cccc} [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \ldots & [T(v_n)]_C \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n}$$

Esta matriz A es única debido a la unicidad de las coordenadas a_{ij}, ya que sus columnas son las coordenadas de los vectores $T(v_j)$ respecto de la base C de W.

La matriz A se denomina "*matriz asociada a T respecto al par de bases B y C*".

b) Probaremos ahora que

$$\forall x \in V;\ [T(x)]_C = A[x]_B .$$

Es decir, veremos cómo la matriz A determina la transformación lineal T.

Para ello:

Si $x \in V$, entonces existen y son únicos $x_1, x_2, ..., x_n \in F$ tales que x se escribe como combinación lineal de vectores de la base B de V, es decir

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

por lo que el vector de coordenadas del vector x respecto a la base B viene dado por

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Calculamos $T(x)$

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) \underset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j T(v_j) \underset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j (a_{ij} w_i) =$$

$$\underset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(x_j a_{ij})}_{\in F} w_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x_j a_{ij})}_{\in F} w_i = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij})}_{\in F} w_i$$

luego el vector de coordenadas de $T(x)$ respecto de la base C de W es

$$[T(x)]_C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_{mj} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow i=1 \\ \leftarrow i=2 \\ \\ \leftarrow i=m \end{array} \quad \Rightarrow \quad [T(x)]_C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix} \qquad (\delta)$$

Referencias:

(1) Por propiedad de las transformaciones lineales.
(2) Por (γ).
(3) Por propiedad de las sumas finitas.
(4) Por propiedad de las sumas finitas.

Calculemos ahora $A\ [x]_B$

$$A\ [x]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n \times 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} \qquad (\varepsilon)$$

De (δ) y (ε) se sigue que $\forall x \in V;\ [T(x)]_C = A[x]_B$.

Q.E.D.

Nota

La matriz asociada representa a la transformación lineal en las bases *B* y *C*.

Transformación lineal asociada a una matriz

Proposición

Si $A \in F^{m\times n}$ (F es un cuerpo) entonces la función $T: F^{n\times 1} \rightarrow F^{m\times 1}$ definida por $T(X) = AX$ es una transformación lineal del espacio vectorial $F_F^{n\times 1}$ en el espacio vectorial $F_F^{m\times 1}$.

Demostración

Probaremos que $T: F^{nx1} \rightarrow F^{mx1} / T(X) = AX$ es una transformación lineal:

i) $X, Y \in F^{n\times 1} \Rightarrow T(X+Y) = T(X) + T(Y)$

$$T(X+Y) \underset{(1)}{=} A(X+Y) \underset{(2)}{=} AX + AY \underset{(3)}{=} T(X) + T(Y)$$

Referencias:
(1) Por definición de *T*.
(2) Por distributividad del producto de matrices respecto a la suma de matrices
(3) Por definición de *T*.

ii) $a \in F \wedge X \in F^{n\times 1} \Rightarrow T(aX) = aT(X)$

$$T(aX) \underset{(1)}{=} A(aX) \underset{(2)}{=} a(AX) \underset{(3)}{=} aT(X)$$

Referencias:
(1) Por definición de *T*.
(2) Por propiedad del producto de un escalar por una matriz
(3) Por definición de *T*.

Luego por **i)** y **ii)** T es una transformación lineal.

Q.E.D.

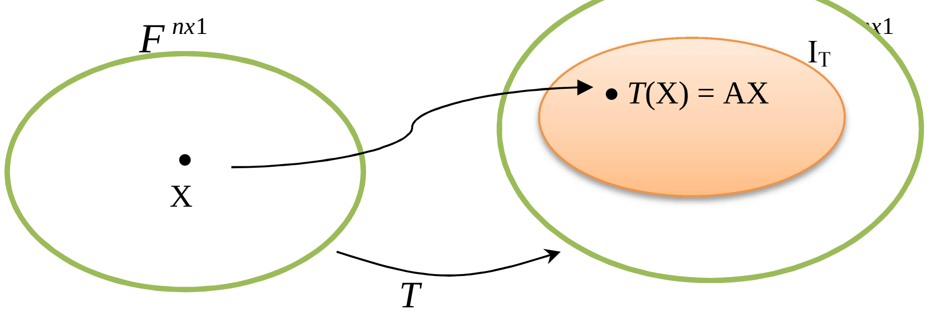
Nota

Toda matriz $A \in F^{mxn}$ determina de modo natural una transformación lineal $T : F^{nx1} \to F^{mx1}$ definida por $T(X) = AX$

LAS TRANSFORMACIONES LINEALES Y LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea $\mathrm{A} \in F^{mxn}$ entonces, por la proposición anterior, queda definida la transformación lineal

$$T : F^{nx1} \to F^{mx1} / T(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}$$



Aquí se presentan dos problemas lineales:

1º problema lineal

Dado $\overline{\mathrm{X}} \in F^{nx1}$, encontrar $T(\overline{\mathrm{X}})$.

Respuesta

Para encontrar $T(\overline{\mathrm{X}})$ basta con realizar el producto A $\overline{\mathrm{X}}$, ya que $T(\overline{\mathrm{X}}) = \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}$.

2º problema lineal

Dado $\mathrm{B} \in F^{mx1}$ determinar, si existe, $\mathrm{X} \in F^{nx1}$ tal que $T(\mathrm{X}) = \mathrm{B}$.

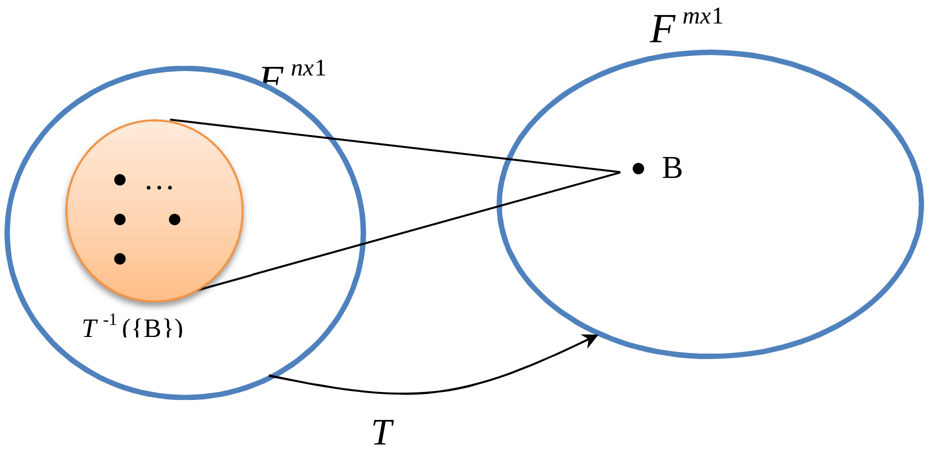
Respuesta:

Es claro que este problema, se reduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales AX= B, donde $\mathrm{A} \in F^{mxn}$, $\mathrm{B} \in F^{mx1}$ y X es el vector incógnita de tipo *nx1*. Es decir determinar el conjunto solución del sistema dado por

$$S_B = \{X \in F^{nx1} / AX=B\} = \{X \in F^{nx1} / T(X)=B\} = T^{-1}(\{B\})$$

donde $T^{-1}(\{B\})$ es el conjunto preimagen por T de {B}.
Es decir que

$$X \text{ es una solución de } AX = B \Leftrightarrow X \in T^{-1}(\{B\})$$



Proposición

Sea el sistema de ecuaciones lineales AX= B, donde $A \in F^{mxn}$, $B \in F^{mx1}$ y X es el vector incógnita de tipo *nx1*

I. El sistema $AX = B$ es *compatible* $\Leftrightarrow$ $B \in I_T$.

II. $AX = B$ es *compatible determinado* $\Leftrightarrow$ $B \in I_T \wedge T$ es inyectiva.

III. $AX = B$ es *compatible indeterminado* $\Leftrightarrow B \in I_T \wedge T$ no es inyectiva.

IV. $AX = B$ es *Incompatible* $\Leftrightarrow B \notin I_T$

V. $\forall B \in F^{mx1}; AX = B$ es *compatible* $\Leftrightarrow$ T es sobreyectiva.

Demostración

Queda para el alumno.

Proposición

Sea $T : F^{nx1} \to F^{mx1} / T(X) = AX$, con $A \in F^{mxn}$. Entonces:

I. T es una transformación lineal.

II. $\dim I_T = rg\ A$

III. $N_T = S_o$, donde S_o es el conjunto solución del sistema de ecuaciones AX=0.

Demostración

I. Ya está demostrado.

II.

$$I_T = \left\{B \in F^{mx1} / \exists X \in F^{nx1} : T(X) = B\right\} = \left\{B \in F^{mx1} / \exists X \in F^{nx1} : AX = B\right\} =$$

$$=\left\{ \mathrm{B}\in F^{mx1} / \exists x_1, x_2, ..., x_n \in F : x_1 c_1 + x_2 c_2 + ... + x_n c_n = \mathrm{B}; \forall j = 1,...,n; c_j \text{ es columna de A} \right\} =$$

$$=\left\{ B\in F^{mx1} / \exists x_1, x_2, ..., x_n \in F : \sum_{j=1}^{n} x_j c_j = B; \forall j = 1,...,n; c_j \text{ es columna de } A \right\} = S_C(A)$$

Es decir,

$$I_T = S_C(A)$$

donde $S_C(A)$ es el Espacio columna de *A*.

Por lo tanto,

$$\dim I_T = \dim S_C(A) = rg(A)$$

III. $N_T = \left\{ X \in F^{nx1} / T(X) = 0_V \right\} = \left\{ X \in F^{nx1} / AX = 0 \right\} = S_0$

Donde 0_v es el vector nulo del espacio vectorial F^{mx1} y S_0 es el conjunto solución del sistema AX=0.

Por lo tanto,

$$\dim N_T = \dim S_0$$

<u>Recordemos</u>: Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y si *V* tiene dimensión finita *n*, entonces $\dim N_T + \dim I_T = \dim V = n$.

Por consiguiente,

$$\dim N_T + \dim I_T = \dim F^{nx1} = n \Rightarrow \dim N_T = n - \dim I_T \Rightarrow \dim N_T \underset{(1)}{=} n - rg(A)$$

<u>Referencias</u>:

(1) Por apartado II.

Q.E.D

<u>Teorema de Rouché-Frobenius</u>

Sean $\mathrm{A} \in F^{mxn}$ y $\mathrm{B} \in F^{mx1}$.

El sistema de ecuaciones lineales $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ es compatible si y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes A es igual al rango de la matriz ampliada $A^a = [A \mid B] \in F^{m\times(n+1)}$.

En símbolos:

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \text{ es compatible } \Leftrightarrow rg(\mathrm{A}) = rg(\mathrm{A}^a).$$

<u>Demostración:</u>

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \text{ es compatible } \Leftrightarrow S_B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists \overline{\mathrm{X}} \in F^{nx1} : \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \exists \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in F : \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j c_j = B$$

Es decir B es combinación lineal de las columnas c_j de la matriz A (*)

Razonamiento:
Sea C el conjunto formado por los vectores columnas de la matriz A, esto es

$$C = \{c_1, c_2, ..., c_n\} \subset F^{mx1}.$$

El subespacio generado por C es precisamente el Espacio columna de A, es decir $\overline{C} = S_C(\text{A})$.

Luego por (*) resulta que $\text{B} \in S_C(A)$.

Sea C_B el conjunto formado por los vectores columnas de la matriz ampliada A^a, es decir,

$$C_{\text{B}} = \{\underbrace{\underbrace{c_1, c_2, ..., c_n}_{\text{columnas de A}}, B}_{\text{columnas de A}^a}\} \subset F^{mx1}.$$

Es claro que el conjunto C_B es linealmente dependiente puesto que B es combinación lineal de los restantes vectores de C_B.
Además el subespacio generado por C_B es precisamente el Espacio columna de A^a, esto es

$$\overline{C}_B = S_C(A^a).$$

¿Cómo son los espacios $S_C(A)$ y $S_C(A^a)$?
Tenemos hasta aquí que:
B es combinación lineal de las columnas de A, luego C_{B} es linealmente dependiente y es tal que

$$C = \{c_1, c_2, ..., c_n\} \subset C_B = \{c_1, c_2, ..., c_n, B\}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 3 de Dependencia Lineal, Unidad Nº 2, se sigue que los conjunto C y C_B generan el mismo subespacio, esto es

$$\overline{C} = \overline{C}_B$$

por lo tanto

$$S_C(A) = S_C(A^a)$$

Luego continuamos la demostración en (*)

$\Leftrightarrow \quad S_C(A) = S_C(A^a) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg } A = \text{rg } A^a$.

Q.E.D.

Una consecuencia inmediata del Teorema es el siguiente

Resultado

Sean $\text{A} \in F^{mxn}$ y $\text{B} \in F^{mx1}$.

El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es incompatible si y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes A es distinto que el rango de la matriz ampliada. En símbolos

$$AX = B \text{ es incompatible } \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(A^a) .$$

Corolario

Sea un sistema de ecuaciones lineales AX=B con $A \in F^{mxn}$, entonces

i) AX=B es determinado si rg A = rg A^a = n (número de incógnitas)

ii) AX=B es indeterminado si rg A = rg A^a < n (número de incógnitas)

Demostración

Queda para el alumno