ÁLGEBRA LINEAL

Ingenierías

ÁLGEBRA II

LM - PM

Unidad Nº 6

Valores y Vectores propios.

FCEyT - UNSE

Unidad Nº6: VALORES Y VECTORES PROPIOS

1.- VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UN OPERADOR LINEAL

Definición 1

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F (**R** o **C**). Un *operador lineal* sobre V es una transformación lineal de V en V.

Definición 2

Sea $V \neq \{0_V\}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo F, y sea T un operador lineal sobre V. Un escalar $\lambda \in F$ es un *valor propio* de T si y sólo si existe algún vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda\, v$.

Definición 3

Sea $V \neq \{0_V\}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo F, y sea T un operador lineal sobre V. Si $\lambda \in F$ es un valor propio de T, se llama *vector propio* de T asociado al valor propio λ, a todo vector no nulo $v \in V$ que verifica la condición $T(v) = \lambda\, v$.

Notas:

1.- Los valores propios de un operador lineal T sobre un espacio vectorial V_F pertenecen al cuerpo F en el que está definido el espacio vectorial V.

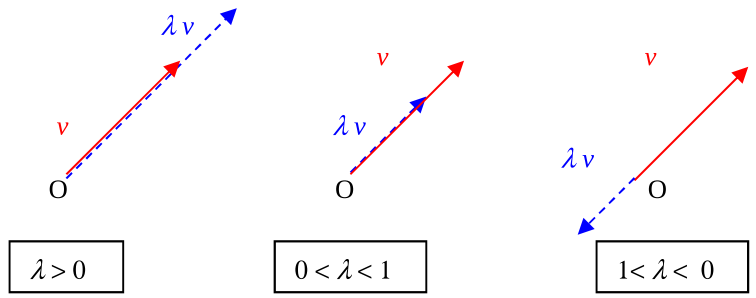
2.- Son sinónimos

a) valor propio, valor característico, raiz característica, autovalor, eigenvalor, valor espectral

b) vector propio, vector característico, autovector, eigenvector

3.- Si v es un vector propio de T asociado a un valor propio λ, entonces $T(v)$ es un múltiplo escalar de v, ya que $T(v) = \lambda\, v$. En el caso en que $\lambda \neq 0$ entonces v y $T(v)$ son paralelos, por definición de paralelismo de vectores.

4.- Los valores y vectores propios tienen una interpretación geométrica útil en los espacios vectoriales reales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Esto es así, ya que si v es un vector propio de un operador lineal T sobre $\mathbf{R}^2$ (o $\mathbf{R}^3$), asociado a un valor propio λ, entonces T dilata a v, contrae a v, invierte el sentido de v, etc. según sea el valor de λ.



Proposición 1

Sea $\lambda \in F$ un valor propio de un operador lineal $T : V_F \to V_F$. El conjunto E_λ formado por todos los vectores $v \in V$ tales que $T(v) = \lambda\, v$ es un *subespacio vectorial* de V. Esto es,

$$S_\lambda = \{v \in V \,/\, T(v) = \lambda\, v\} \prec V$$

Demostración: Queda de tarea para el alumno

Definición 4

S_λ se denomina *espacio propio* asociado al valor propio $\lambda \in F$.

Proposición 2

Sea $T : V_F \to V_F$ un operador lineal. Entonces el conjunto de vectores propios de T asociados a valores propios diferentes es linealmente independiente.

Demostración:

Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ vectores propios de T asociados a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in F$ respectivamente, tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$.

Es decir:

$$T(v_i) = \lambda_i\, v_i, \quad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j.$$

Debemos probar que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente, es decir que

$$\forall\, n \in N, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = 0_V \Rightarrow \forall\, i = 1, ..., n;\ a_i = 0 \right) : P(n)$$

Para ello, demostraremos que la proposición *P(n)* es verdadera empleando inducción en *n*

- Si $n = 1$, entonces

$$a_1\, v_1 = 0_v \Rightarrow a_1 = 0$$

ya que v_1 es vector propio y por lo tanto $v_1 \neq 0_v$

Luego, se verifica que la Proposición *P(n)* es verdadera para $n = 1$, es decir $\{v_1\}$ es linealmente independiente.

- Si suponemos que la Proposición *P(n)* es válida para $n = h$, debemos probar que la Proposición *P(n)* es verdadera para $n = h + 1$.

En esta situación la hipótesis inductiva es: la Proposición *P(n)* es verdadera para $n = h$, es decir que el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_h\}$ es linealmente independiente.

Debemos probar que la Proposición *P(n)* es verdadera para $n = h + 1$, es decir que el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_h, v_{h+1}\}$ es linealmente independiente.

Para ello tomemos la siguiente combinación lineal, de valor 0_V, de estos $h+1$ vectores propios

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i\, v_i = 0_V \qquad (1)$$

Aplicamos T en ambos miembros de (1):

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i\, v_i \right) = T(0_V)$$

Por Propiedades 1 y 3 de Transformaciones lineales, resulta

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i\, T(v_i) = 0_V$$

Por hipótesis $T(v_i) = \lambda_i\, v_i$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$ entonces reemplazando se tiene

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_i v_i = 0_{\mathrm{v}} \qquad (2)$$

Ahora, multiplicamos ambos miembros por λ_{h+1} en (1)

$$\lambda_{h+1} \sum_{i=1}^{h+1} a_i v_i = \lambda_{h+1} 0_{\mathrm{v}}$$

Por propiedad distributiva del producto de un escalar por una combinación lineal, es

$$\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_{h+1} a_i v_i = 0_{\mathrm{v}}$$

Como el producto es conmutativo en el cuerpo *F*, resulta

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_{h+1} v_i = 0_{\mathrm{v}} \qquad (3)$$

Si restamos miembro a miembro (3)-(2), tenemos

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_{h+1} v_i - \sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_i v_i = 0_{\mathrm{v}}$$

y realizando las operaciones correspondientes, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{h} a_i \left(\lambda_{h+1} - \lambda_i\right) v_i = 0_{\mathrm{v}}$$

esto es,

$$a_1 \left(\lambda_{h+1} - \lambda_1\right) v_1 + a_2 \left(\lambda_{h+1} - \lambda_2\right) v_2 + \ldots + a_h \left(\lambda_{h+1} - \lambda_h\right) v_h = 0_{\mathrm{v}}$$

Observemos que ésta expresión es una combinación lineal de valor 0_{v} de vectores del conjunto $\{v_1, \ldots, v_h\}$, que es linealmente independiente por hipótesis inductiva, de modo que los escalares deben ser simultáneamente nulos.

Es decir,

$$\begin{array}{c} a_1 \left(\lambda_{h+1} - \lambda_1\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_2 \left(\lambda_{h+1} - \lambda_2\right) = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_h \left(\lambda_{h+1} - \lambda_h\right) = 0 \Rightarrow a_h = 0 \end{array}$$

Esto es así ya que los valores propios son diferentes entre sí, por hipótesis del teorema, por lo tanto los escalares son simultáneamente nulos

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_h = 0$$

Reemplazando en (1) el valor de estos escalares, obtenemos

$$0\, v_1 + 0\, v_2 + \ldots + 0\, v_h + a_{h+1} v_{h+1} = 0_{\mathrm{v}}$$

de donde,

$$a_{h+1} v_{h+1} = 0_v \Rightarrow a_{h+1} = 0$$

ya que $v_{h+1} \neq 0_v$ por ser vector propio de *T*.

Luego $\{v_1, v_2, ..., v_h, v_{h+1}\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto la proposición *P(n)* es verdadera para todo $n \in$ N.

Q.E.D.

Observación:

La proposición recíproca de la Proposición 2 es falsa, pues puede ocurrir que un conjunto de vectores propios sea linealmente independiente y estos vectores estén asociados a valores propios no necesariamente distintos, hasta puede ocurrir que todos los valores propios sean iguales. Tal es el caso del operador lineal Identidad sobre el espacio vectorial real $\mathbf{R}^3$, este es, $I_d : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 / I_d(x, y, z) = (x, y, z)$ en donde el conjunto de vectores propios $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es linealmente independiente y estos vectores propios están asociados al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Teorema 1

Sea V_F un espacio vectorial de dimensión finita *n* y sea *T* un operador lineal sobre *V*. Si existe una base $\mathscr{B}$ de *V* formada por vectores propios $v_1, v_2, ..., v_n$ de *T*, asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, no necesariamente diferentes, entonces la matriz asociada a *T* respecto a la base $\mathscr{B}$ de *V* es una matriz diagonal y en su diagonal principal se encuentran los valores propios de *T*.

Demostración:

Por hipótesis, tenemos que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de *V* tal que

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1,\ T(v_2) = \lambda_2 v_2,\ ...,\ T(v_n) = \lambda_n v_n,$$

con los λ_i no necesariamente diferentes.

Expresamos a cada uno de los vectores $T(v_1),\ T(v_2),\ ...,\ T(v_n)$ en término de los vectores de la base $\mathscr{B}$, es decir, como combinación lineal de los vectores de $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{l} T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0\, v_2 + ... + 0\, v_n \\ T(v_2) = 0\, v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + 0\, v_n \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ T(v_n) = 0\, v_1 + 0\, v_2 + ... + \lambda_n v_n \end{array}$$

Es claro que las columnas de la matriz asociada a *T* respecto a la base $\mathscr{B}$ son las coordenadas de los vectores $T(v_1),\ T(v_2),\ ...,\ T(v_n)$ respecto de la base $\mathscr{B}$.

Es decir que las columnas de la matriz asociada a T respecto a la base $\mathscr{B}$ son los vectores:

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ : \\ : \\ 0 \end{bmatrix} \in F^{nx1},\ [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ : \\ : \\ 0 \end{bmatrix} \in F^{nx1},\ \ldots,\ [T(v_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ : \\ : \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{nx1}$$

Luego la matriz asociada a *T* respecto a la base $\mathscr{B}$ es

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ : & : & \dots & : \\ : & : & \dots & : \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{nxn}$$

M es una matriz diagonal, cuya diagonal principal está formada por los valores propios del operador lineal *T*; con lo que queda demostrado el teorema.

Observación:

En el Teorema 1 no se requiere que los escalares λ_i sean distintos, incluso pueden ser todos iguales como vimos en el caso del operador lineal Identidad $I_d : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 / I_d(x, y, z) = (x, y, z)$ que tiene tres valores propios coincidentes $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ y los vectores propios asociados son los tres vectores canónicos **(***1, 0, 0***)**, (*0, 1, 0*), (*0, 0, 1*) que constituyen un conjunto linealmente independientes y por lo tanto es una base de $\mathbf{R}^3$ y en consecuencia la matriz asociada al operador lineal Identidad con respecto de esta base, es una matriz diagonal, más aún es una matriz escalar, los elementos de su diagonal principal son unos .

Definición 5

Sea V_F un espacio vectorial de dimensión finita *n* y sea *T* un operador lineal sobre *V*.
T es *diagonalizable* si y sólo si existe una base de *V* formada por vectores propios de *T*.

Proposición 3

Sea V_F un espacio vectorial de dimensión finita *n* y sea *T* un operador lineal sobre *V*. Si *T* tiene *n* valores propios diferentes, entonces *T* es diagonalizable.

Demostración:
Por hipótesis el operador lineal *T* admite *n* valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ diferentes, entonces por el Teorema 1, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formado por los *n* vectores propios de *T* asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente, es linealmente independiente.

Además, como la dimensión del espacio vectorial *V* es igual a *n*, resulta que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de *V*. Luego por la *Definición 5* el operador lineal *T* es diagonalizable.

2.- VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

Definición 1

Sea $A \in F^{n \times n}$. Un escalar $\lambda \in F$ es un *valor propio* de *A* si y sólo si existe algún vector no nulo $v \in F^{n \times 1}$ tal que $Av = \lambda v$.

Definición 2

Si $\lambda \in F$ es un valor propio de $A \in F^{n\,x\,n}$. Los vectores no nulos $v \in F^{n\,x\,1}$ que verifican la condición $A\,v = \lambda\,v$ se denominan *vectores propios* de *A* asociados al valor propio λ.

Proposición 1

El conjunto E_λ de los vectores $v \in F^{n\,x\,1}$ tales que verifican la condición $A\,v = \lambda\,v$ es un subespacio vectorial de *V*. Esto es

$$E_\lambda = \left\{ v \in F^{nx1} \,/\, A\,v = \lambda\,v \right\} \prec V$$

Demostración:

Queda para el alumno.(Es similar a la Proposición 1 correspondiente a los operadores lineales).

Definición 3

El conjunto E_λ de los vectores $v \in F^{n\,x\,1}$ tales que verifican la condición $A\,v = \lambda\,v$ se denomina *espacio propio* correspondiente al valor propio λ.

Proposición 2

Sea $A \in F^{n\,x\,n}$. El conjunto de vectores propios de *A* asociados a valores propios diferentes es linealmente independiente.

Demostración:
Queda para el alumno.(Es similar a la Proposición 2 correspondiente a los operadores lineales).

Proposición 3

Sea $A \in F^{n\,x\,n}$, $\lambda \in F$ es un valor propio de *A* si y sólo si la matriz $\lambda I_n - A$ es singular (no inversible), siendo I_n la matriz unidad de orden *n*.

Demostración

$\lambda \in F$ es un valor propio de A $\Leftrightarrow \exists\ v \in F^{n\,x\,1} \wedge v \neq 0_v$, tal que $A\,v = \lambda\,v \Leftrightarrow \exists\ v \in F^{n\,x\,1} \wedge v \neq 0_v$ tal que $\lambda\,I_n\,v - A\,v = 0_v \Leftrightarrow \exists\ v \in F^{n\,x\,1} \wedge v \neq 0_v$ tal que $(\lambda\,I_n - A)v = 0_v \Leftrightarrow$ el sistemas de ecuaciones homogéneo $(\lambda\,I_n - A)v = 0_v$ es compatible indeterminado $\Leftrightarrow$ la matriz $\lambda\,I_n - A$ no es inversible (es singular).

Definición 4

Sea $A \in F^{nxn}$:

- $\lambda I_n - A$ se denomina *Matriz Característica.*
- $\det(\lambda I_n - A)$ se denomina *Polinomio Característico*. Es un polinomio de grado *n* en la variable λ con coeficientes en el cuerpo *F*. La notación usual es $P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
- $\det(\lambda I_n - A) = 0$ se denomina *Ecuación Característica*. Es una ecuación de grado *n* en la variable λ con coeficientes en el cuerpo *F*.

Nota:

Por el Corolario del Teorema Fundamental de Álgebra, la ecuación característica $\det(\lambda I_n - A) = 0$ admite exactamente n raíces. Estas raíces pueden o no pertenecer al cuerpo F. Únicamente las raíces pertenecientes al cuerpo F son los valores propios de la matriz $A \in F^{nxn}$.

Procedimiento para determinar los valores y vectores propios

Sea $A \in F^{n \times n}$

I. $\det(\lambda\, I_n - A) = 0$. Las raíces de esta ecuación pertenecientes al cuerpo F son los valores propios de la matriz A.

II. Para cada valor propio $\lambda_i \in F$, formamos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\lambda_i\, I_n - A)\, v = 0_v$, donde v es el vector incógnita. De cada uno de estos sistemas de ecuaciones lineales se determina el conjunto solución, que es precisamente el espacio propio E_{λ_i} correspondiente al valor propio λ_i.

III. Determinamos una base $\mathscr{B}_i$ de cada espacio propio E_{λ_i}. Cada una de estas bases está formada por los vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio λ_i.

Proposición 4

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal.

Demostración

Sea $A \in F^{n \times n}$, una matriz triangular superior, con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A viene dado por:

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - a_{22} & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn})$$

Consideramos la ecuación característica

$\det(\lambda I_n - A) = 0$,

esto es,

$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})...(\lambda - a_{nn}) = 0$

Al resolver la ecuación característica, observamos que las raíces son precisamente los elementos de la diagonal principal de la matriz triangular superior *A*, esto es:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 = a_{11} \\ \lambda_2 = a_{22} \\ : \\ : \\ \lambda_n = a_{nn} \end{array}\right\}$$

Es decir, que los valores propios de la matriz *A* son los elementos de su diagonal principal.

En forma análoga procedemos si la matriz A es una matriz triangular inferior.

Q.E.D.

Proposición 5

Los valores propios de una matriz diagonal son los elementos de su diagonal principal.

Demostración: Queda para el alumno

2.1. SEMEJANZA DE MATRICES

Definición 5

Sean dos matrices $A, B \in F^{nxn}$.
A es *semejante* a *B* si y sólo si existe una matriz $P \in F^{nxn}$ inversible, tal que $B = P^{-1}\ A\ \ P$.

Proposición 6

La relación de semejanza de matrices es una *relación de equivalencia*.

Demostración:

i) La relación de semejanza de matrices es *Reflexiva*

Sea la matriz $A \in F^{nxn}$. Es claro que *A* es semejante a *A*, ya que existe la matriz unidad $I_d \in F^{nxn}$, que es inversible, tal que $A = I_d^{-1}\ A\ \ I_d$

ii) La relación de semejanza de matrices es *Simétrica*

Sean dos matrices $A, B \in F^{nxn}$. Probaremos que "si *A* es *semejante* a *B*, entonces *B* es *semejante* a *A*".

Como *A* es *semejante* a *B*, entonces existe una matriz $P \in F^{nxn}$ inversible, tal que

$$B = P^{-1}\ A\ \ P$$

Multiplicamos en ambos miembros a la izquierda por P y a la derecha por P^{-1}, y tenemos

$$P\ \ B\ \ P^{-1} \ = P\,(P^{-1}\ A\ \ P)\ \ P^{-1}$$

Como el producto de matrices es asociativo resulta

$$P\ \ B\ \ P^{-1} \ = \ (P\,P^{-1})\ \ A\ \ (P\,P^{-1})$$

De aquí se sigue

$$P\ \ B\ \ P^{-1} \ = A$$

Luego B es semejante a A, ya que P es la inversa de P^{-1}.

iii) La relación de semejanza de matrices es *Transitiva*

Sean tres matrices A, B, $C \in F^{nxn}$. Probaremos que "si A es semejante a B *y* B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Como A es semejante a B *y* B es semejante a C entonces, existen dos matrices inversibles P, $S \in F^{nxn}$ tales que

$$B = P^{-1}\ A\ \ P \ \ \wedge\ \ C = S^{-1}\ B\ \ S$$

entonces,

$$C = S^{-1}\,(P^{-1}\ A\ \ P\,)\ \ S$$

Y como el producto de matrices es asociativo, resulta

$$C = \ (S^{-1}\ P^{-1}\,)\ A\ \ (P\ S)$$

Empleando la propiedad de la inversa del producto de matrices inversibles, esto es

$$\left(P\ S\right)^{-1} = \ S^{-1}\ P^{-1},$$

observamos que existe una matriz inversible $P\ S \in F^{nxn}$ tal que

$$C = \ (P\ S)^{-1}\ A\ \ (P\ S)$$

Por lo tanto A es semejante a C.

Finalmente de i), ii) y iii) se sigue que la relación de semejanza de matrices es una relación de equivalencia.

Q.E.D.

<u>*Nota*</u>:

En adelante, si una matriz A es semejante a otra matriz B diremos simplemente que "A y B son semejantes", esto es debido a que la equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

<u>*Proposición 7*</u>

Si dos matrices son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto tienen los mismos valores propios.

Demostración

Sean $A, B \in F^{nxn}$ matrices semejantes y sea $P \in F^{nxn}$ inversible tal que $B = P^{-1} A P$. Probaremos que det ($\lambda\, I_n$ - B) = det ($\lambda\, I_n$ - A)

En efecto,

$$det(\lambda\ I_n - B) \quad = \quad det\left(\lambda\ I_n - P^{-1}A\ P\right) \quad = \quad det\left(\lambda\ I_n\ (P^{-1}\ P\,)\ -\ P^{-1}A\ P\right) \quad =$$

$$= \quad det\left(P^{-1}(\lambda\ I_n\,)\ P - P^{-1}\ A\ P\right) \quad = \quad det\left(P^{-1}(\lambda\ I_n - A)\ P\right) \quad = \quad det\left(P^{-1}\right)\ det(\lambda I_n - A)\ \ det(P) =$$

$$= det\left(P^{-1}\right)\ det(P)\ \ det(\lambda\ I_n - A) \quad = \quad det\left(P^{-1}P\right)\ det(\lambda\ I_n - A) \quad = \quad det(I_{\ n})\ \ det(\lambda\ I_n - A) \quad =$$

$$= \quad det(\lambda I_n - A)$$

Q.E.D.

<u>*Observación:*</u>

El recíproco de la Proposición 7 es falso, ya que dos matrices pueden tener los mismos valores propios sin ser matrices semejantes.

2.2.- MATRICES DIAGONALIZABLES

<u>*Definición 6*</u>

Sea $A \in F^{nxn}$. La matriz A es *diagonalizable* si y sólo si existe una matriz diagonal $D \in F^{nxn}$ tal que A es semejante a D.

<u>*Observaciones*</u>:

1.- Como vimos en la Proposición 7, si una matriz A es semejante a una matriz D, entonces resulta que A y D tienen los mismos valores propios. Además, la Proposición 5, asegura que si D es una matriz diagonal entonces los valores propios de D son los elementos de su diagonal principal. De estos resultados se desprende que si una matriz A es semejante a una matriz diagonal D entonces los valores propios de A son precisamente los elementos de la diagonal principal de la matriz diagonal D y por Definición 6 la matriz A es diagonalizable .

2.- Empleando las definiciones 6 y 5 podemos realizar el siguiente razonamiento:

$A \in F^{nxn}$ es diagonalizable $\underset{\text{por Def. 6}}{\Leftrightarrow}$ existe una matriz diagonal $D \in F^{nxn}$ tal que A es semejante a D $\Leftrightarrow$

$\underset{\text{por Def. 5}}{\Leftrightarrow}$ existe una matriz inversible $P \in F^{nxn}$ tal que $D = P^{-1} A P$

3.- De las observaciones 1 y 2 podemos advertir que la matriz inversible P *diagonaliza* a la matriz A y la matriz diagonal D semejante a A, tiene en su diagonal principal a los valores propios de la matriz A.

<u>*Proposición 8*</u>

Una matriz $A\in F^{nxn}$ es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios que forman un conjunto linealmente independiente. En tal caso la matriz diagonal D semejante a la matriz A está dada por:

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ : & : & \dots & : \\ : & : & \dots & : \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{nxn}$$

donde $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ son los valores propios de A. Si $P\in F^{nxn}$ es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de la matriz A entonces

$$D = P^{-1}AP\,.$$

Demostración:

a) Supongamos que A tiene n vectores linealmente independientes $v_1,v_2,\dots,v_n$ respectivamente asociados a los valores propios $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ (no necesariamente diferentes) de la matriz A. Es decir,

$$A\,v_1=\lambda_1\,v_1,\quad A\,v_2=\lambda_2\,v_2,\quad \dots\,,\quad A\,v_n=\lambda_n\,v_n \qquad (1)$$

Probaremos que la matriz A es diagonalizable.

Para ello, sea $P\in F^{nxn}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios $v_1,v_2,\dots,v_n$ de la matriz A, esto es,

$$P=\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_j & \dots & v_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}\ ,\ \text{con}\quad v_j=\begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ : \\ : \\ p_{nj} \end{bmatrix}\in F^{nx1},\ \forall\ j=1,\dots,n$$

Observemos que la columna j-ésima de AP es igual a Av_j de modo que:

$$AP=\begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_j & \dots & Av_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix}$$

Luego, por (1), se tiene

$$A\,P = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \ldots & \lambda_j v_j & \ldots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix} \quad (2)$$

Por otro lado,

la columna j-ésima de PD es igual a $P \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1j}\,\lambda_j \\ p_{2j}\,\lambda_j \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{nj}\,\lambda_j \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = \lambda_j\, v_j$,

por lo tanto,

$$PD = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \ldots & \lambda_j v_j & \ldots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta (2) y (3) se sigue que

$$P\,D = A\,P \quad (4)$$

y como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente entonces *P* es inversible, por lo tanto si multiplicamos a izquierda en ambos miembros de (4) por P^{-1}, resulta

$$D = P^{-1} A\,P \quad (5)$$

Es claro que *D* es una matriz diagonal semejante a *A*, ya que existe una matriz *P* inversible que verifica la igualdad (5), luego, por Definición 6, *A* es diagonalizable.

b) Ahora demostraremos que:

Si la matriz *A* es diagonalizable, entonces *A* tiene *n* vectores propios que forman un conjunto linealmente independiente.

Por hipótesis la matriz *A* es diagonalizable, entonces por Definición 6 existe una matriz diagonal *D* semejante a *A*, y en consecuencia por Definición 5, existe una matriz *P* inversible tal que

$$D = P^{-1} A\,P \qquad (\alpha)$$

multiplicamos a izquierda en ambos miembros de (α) por *P* y resulta

$$P\,D = P\;(P^{-1} A\,P)$$

Aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices tenemos

$$P\,D = (P\;P^{-1})\,A\,P$$

Luego

$$P\,D = A\,P \qquad (\beta)$$

Ahora, si a la matriz diagonal D la representamos por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ : & : & \dots & : \\ : & : & \dots & : \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{nxn},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ no son necesariamente diferentes. Y si a la matriz P la expresamos a través de sus columnas, es decir

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_j & \dots & v_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix} \in F^{nxn}, \text{ con } v_j \text{ columna de } P; \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

Entonces los productos PD y AP expresados en términos de sus columnas son

$$PD = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_j v_j & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix} \qquad (\delta)$$

y

$$A\,P = \begin{bmatrix} | & | & & | & & | \\ A v_1 & A v_2 & \dots & A v_j & \dots & A v_n \\ | & | & & | & & | \end{bmatrix} \qquad (\rho)$$

Luego, de (β), (δ) y (ρ) se sigue que las respectivas columnas de PD y de AP son iguales es decir

$$A v_1 = \lambda_1 v_1, \;\; A v_2 = \lambda_2 v_2, \;\; \dots, \;\; A v_n = \lambda_n v_n$$

Esto nos indica que $v_1, v_2, \dots, v_n$ son vectores propios de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente; y como P es inversible entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Q.E.D.

<u>Corolario</u>

Si $A \in F^{nxn}$ admite *n* valores propios diferentes entonces *A* es diagonalizable.

Demostración

Por hipótesis la matriz *A* tiene *n* valores propios diferentes. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ los *n* valores propios diferentes de la matriz *A*, y sean $v_1, v_2, ..., v_n$ *n* vectores propios de *A* asociados a cada uno de los valores propios respectivamente, esto es

$$A\,v_1 = \lambda_1\, v_1,\quad A\,v_2 = \lambda_2\, v_2,\quad \ldots\ ,\quad A\,v_n = \lambda_n\, v_n\,,$$

entonces, por *Proposición 2*, el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

Esto es, la matriz *A* tiene *n* vectores propios que forman un conjunto linealmente independiente, entonces por la *Proposición 8* resulta que *A* es diagonalizable.

Q.E.D.

<u>Teorema de Cayley-Hamilton</u> *(sin demostración)*

Toda matriz $A \in F^{nxn}$ es un cero de su polinomio característico.

3.- MATRICES REALES SIMÉTRICAS-DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

<u>Definición 1</u>

Sea la matriz $A \in \mathbf{R}^{nxn}$. La matriz *A* es *simétrica* si y sólo si *A* es igual a su transpuesta.

En símbolos

$$A \in \mathbf{R}^{nxn} \text{ es } simétrica \iff A = A^t$$

También podemos expresar este concepto como sigue:

$$A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{R}^{nxn} \text{ es } simétrica \iff a_{ij} = a_{ji},\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n,\ \forall\, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

<u>Teorema1</u>

Sea *A* una matriz real simétrica de orden *n*, entonces:

I. *A* tiene *n* valores propios (reales).

II. *A* tiene *n* vectores propios linealmente independientes.

<u>Teorema 2</u>

Sea $A \in \mathbf{R}^{nxn}$ una matriz simétrica. Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes con vectores propios asociados v_1 y v_2 respectivamente, entonces v_1 y v_2 son ortogonales.

Demostración

Por hipótesis λ_1 y λ_2 son valores propios de *A*, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Además,

$v_1 \in F^{nx1}$ es un vector propio de *A* asociado al valor propio λ_1, es decir

$$A\,v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad (1)$$

$v_2 \in F^{nx1}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ_2, es decir

$$A v_2 = \lambda_2 v_2 \qquad (2)$$

Probaremos que $v_1 \perp v_2$. Esto es equivalente a probar que $v_1 \bullet v_2 = 0$, donde $\bullet$ es un producto interior en $\mathbf{R}^n$.

En efecto, empleando el producto interior calculemos

$$A v_1 \bullet v_2 \underset{\uparrow}{=} (\lambda_1 v_1) \bullet v_2 \underset{\uparrow}{=} \lambda_1 (v_1 \bullet v_2) \qquad (3)$$

por (1) / por Axioma de Prod. Interior

Por otro lado

$$A v_1 \bullet v_2 \underset{\uparrow}{=} v_1 \bullet A^t v_2 \underset{\uparrow}{=} v_1 \bullet A v_2 \underset{\uparrow}{=} v_1 \bullet (\lambda_2 v_2) \underset{\uparrow}{=} \lambda_2 (v_1 \bullet v_2) \qquad (4)$$

por Propiedad Auxiliar / A es simétrica / por (2) / por Propiedad de Producto Interior

De (3) y (4) se sigue:

$$\lambda_1 (v_1 \bullet v_2) = \lambda_2 (v_1 \bullet v_2)$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $v_1 \bullet v_2 = 0$. Por lo tanto, v_1 y v_2 son ortogonales, con lo que queda demostrado el teorema.

Propiedad Auxiliar:

Si $A \in \mathbf{R}^{nxn}$ y $u, v \in \mathbf{R}^{nx1}$, entonces $A u \bullet v = u \bullet A^t v$

En efecto,

$$A u \bullet v = (A u)^t v = (u^t A^t) v = u^t (A^t v) = u \bullet A^t v$$

Con lo que queda así demostrado.

Definición

Sea una matriz $Q \in \mathbf{R}^{nxn}$. Q es *ortogonal* si y sólo si su inversa coincide con su transpuesta.
En símbolos,

$$Q \in \mathbf{R}^{nxn} \text{ es } \textit{ortogonal} \iff Q^{-1} = Q^t$$

Teorema

Sea A una matriz simétrica real de orden n. Entonces A tiene n vectores propios ortogonales. De donde, la matriz A puede expresarse por $A = QDQ^t$ o bien $D = Q^t A Q$, siendo la matriz Q ortogonal y D una matriz diagonal cuyos elementos en su diagonal son los valores propios de A.

Demostración

Por el Teorema 1I., la matriz A tiene n valores propios reales. Determinamos una base de cada Espacio propio asociado a cada valor propio real. Si aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases, obtenemos su correspondiente base ortogonal cuyos vectores siguen siendo vectores propios asociados al respectivo valor propio. Por el Teorema 2 los vectores propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales, por lo tanto los vectores de bases distintas son ortogonales, y por el Teorema 1II. la matriz A tiene n vectores linealmente independientes, entonces si realizamos la unión de las bases ortogonales se obtiene un conjunto de n vectores propios ortogonales. En consecuencia la matriz A es diagonalizable. Normalizando los n vectores propios ortogonales de A se consigue un conjunto de n vectores propios ortonormales. Luego, si Q es la matriz cuyas columnas son los n vectores propios ortonormales de A entonces, Q es una matriz ortogonal y por tanto

$$D = Q^t AQ$$

donde D es una matriz diagonal semejante a A, con los valores propios de A en su diagonal.

Un esquema práctico es el siguiente:

<u>Procedimiento para diagonalizar una matriz real simétrica</u>

I. Resolver la ecuación característica $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Como A es real simétrica, se obtienen n valores propios reales.

II. Para cada valor propio, se encuentra el espacio propio asociado.

III. Para cada espacio propio se encuentra una base.

IV. A cada base se aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y se normaliza, si es necesario, a fin de obtener una base ortonormal de cada espacio propio.

V. Se construye la matriz Q, cuyas columnas son los n vectores propios ortonormales que constituyen la unión las bases ortonormales.

Q es la matriz que *diagonaliza ortogonalmente* a la matriz A.

<u>Definición</u>

Una matriz $A \in \mathbf{R}^{nxn}$ es *diagonalizable ortogonalmente* si y sólo si existe una matriz Q ortogonal tal que $D = Q^t \, A \, Q$, donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, donde λ_i son valores propios de A y las columnas de Q son los vectores propios ortogonales de A.

4.- FORMAS LINEALES. FORMAS BILINEALES. FORMAS CUADRÁTICAS

I.- FORMAS LINEALES

<u>Definición</u>

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sea una función $\varphi: V \to F$, φ es una ***forma lineal*** (o una ***funcional lineal***) si y sólo si

i) $\forall u, v \in V;\ \ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

ii) $\forall\ \alpha \in F\ \wedge\ \forall\ v \in V;\ \ \varphi(\alpha\, u) = \alpha\, \varphi(u)$

Es decir, una forma lineal sobre V es una transformación lineal de V en F.

Ejemplos

1.- La función proyección $\pi_1 : R^n \to R \,/\, \pi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1$ es una forma lineal sobre R^n

2.- Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden *n* sobre el cuerpo *F*. La función traza definida por

$$tr : F^{n\times n} \to F \,/\, tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn},\ \ \text{donde}\ \ A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,...,n \\ j=1,2,...,n}}$$

es una forma lineal sobre F^{nxn}

Proposición

El conjunto de las formas lineales de un espacio vectorial V sobre un cuerpo F es un espacio vectorial sobre el cuerpo F, con la suma de formas lineales y el producto de un escalar por una forma lineal definidas por

$$\begin{gathered}\forall v \in V; (\varphi + \sigma)(v) = \varphi(v) + \sigma(v) \\ \forall v \in V \wedge \forall a \in F; (a\varphi)(v) = a\ \varphi(v)\end{gathered}$$

y donde φ y σ son formas lineales sobre V. Este espacio vectorial se llama el ***espacio dual de*** V y se denota por V*

II.- FORMAS BILINEALES

Definición 1

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F (**R** o **C**) y sea *f* una función que a cada par de vectores le asigna un escalar del cuerpo; es decir:

$$\begin{aligned} f : V \times V &\to F \\ (u,v) &\mapsto f(u,v)\end{aligned}$$

La función f es una ***forma bilineal*** si y sólo si satisface los siguientes axiomas

$$Ax_1: \ f(u+u',v) = f(u,v) + f(u',v) \qquad \forall u,u',v \in V$$
$$Ax_2: \ f(u,v+v') = f(u,v) + f(u,v') \qquad \forall u,v,v' \in V$$
$$Ax_3: \ f(au,v) = f(u,av) = af(u,v) \qquad \forall u,v \in V, \ \forall a \in F$$

Nota

Estos axiomas expresan que *f* es lineal en la primera y en la segunda componente.

Proposición 1

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F (**R** o **C**). Si $f: V \times V \to F$ es una forma bilineal sobre *V*, entonces

$$i) \ \ f(u,0_v) = f(0_v,v) = 0$$
$$ii) \ \ f(-u,v) = f(u,-v) = -f(u,v)$$

Demostración (queda para el alumno)

Ejemplos

1 – Sea V = R^2, la siguiente función es una forma bilineal:

$$\begin{aligned} f: \quad & R^2 \times R^2 \to R \\ & \big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \mapsto x_1 y_2 \end{aligned}$$

2- La función

$$f: \ R^2 \times R^2 \to \ R \ / \ f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1 + y_2$$

No es una forma bilineal ya que no se verifica el Ax_1, en efecto:

$$f\big((x_1,x_2)+(x'_1,x'_2),(y_1,y_2)\big) = f\big((x_1+x'_1,x_2+x'_2),(y_1,y_2)\big) = x_1 + x'_1 + y_2 \quad (\alpha)$$
$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) + f\big((x'_1,x'_2),(y_1,y_2)\big) = \big(x_1+y_2\big) + \big(x'_1+y_2\big) \qquad (\beta)$$

Obsérvese que $(\alpha) \neq (\beta)$ y por lo tanto

$$f\big((x_1,x_2)+(x'_1,x'_2),(y_1,y_2)\big) \neq f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) + f\big((x'_1,x'_2),(y_1,y_2)\big)$$

3- Si φ y σ son formas lineales arbitrarias sobre un espacio vectorial V, entonces la función

$$f: V \times V \to F \ / \ f(u,v) = \varphi(u)\sigma(v)$$

Es una forma bilineal pues φ y σ son formas lineales.

Nota

Una forma bilineal de esta clase se llama “***Producto Tensorial***” de φ y σ, y se representa en general por

$f = \varphi \otimes \sigma$

4- Todo producto interior es una forma bilineal. En particular son formas bilineales:

4.1- El producto escalar en R^2

$$\bullet : R^2 \times R^2 \to R \,/\, (x_1, x_2)\bullet(y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

4.2- La función definida por $\int_a^b f(x)g(x)dx$ en el espacio vectorial $C_{[a,b]}$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$.

5- Sea $A \in R^{nxn}$, la función $f: R^{n\times 1} \times R^{n\times 1} \to R \,/\, f(X,Y) = X^t AY$ es bilineal como consecuencia de las propiedades del producto y la transposición de matrices.

Formas Bilineales sobre $\mathbf{R^n}$

Sean $u = (x_1, x_{2,}..., x_n)$ $w = (y_1, y_2..., y_n)$ y sean X e Y los respectivos vectores de coordenadas respecto de la base canónica.

La expresión $X^t AY$ define una forma bilineal sobre $\mathbf{R^n}$ para toda matriz $A \in R^{nxn}$.

En el caso de n = 2 se tiene:

$$f\left((x_1, x_2),(y_1, y_2)\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R}^2 \text{x} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f\left((x_1, x_2),(y_1, y_2)\right) = 3x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2$

Es una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ y se expresa matricialmente de la siguiente manera

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA FORMA BILINEAL

Sea V_F un espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$ y $f : V \text{ x } V \to F$ una forma bilineal. Si $B = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ es una base de V, entonces f queda caracterizada por los valores $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ que son los elementos de la matriz $A \in F^{nxn}$, llamada matriz de f respecto de la base B.

En efecto, sean u, w vectores cualesquiera de V, como B es una base de V, estos vectores se pueden expresar de modo único como combinación lineal de los vectores de B

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \qquad (\gamma)$$

de donde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ resultan ser respectivamente, las coordenadas de *u* y *w* respecto de la base *B*.

Demostraremos que efectivamente $f(u,w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X^t A Y$.

$$f(u,w) \underset{(1)}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, w\right) \underset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i, w) \underset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \underset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \; f(v_i, v_j)\right) =$$

$$\underset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} \underset{(6)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

$$X^t A Y = \left[x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} == \left[\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1} \;\; \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2} \;\; \dots \;\; \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Luego

$$f(u,w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X^t A Y = \left[x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n\right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Donde los escalares $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ son los elementos de la matriz $A \in F^{nxn}$ y x_i , y_i son las coordenadas de los vectores *u* y *w* respecto de la base *B* de *V*.

En este caso, se dice que la matriz *A* es la matriz de la forma bilineal *f* en la base *B*.

La expresión $f(u,w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ se llama polinomio bilineal correspondiente a la matriz *A*. Un polinomio bilineal completo tiene n^2 términos.

<u>*Referencias*</u>

(1) Se reemplaza *u* por su expresión en (γ)

(2) Por axioma Ax_1 de la Definición 1.

(3) Se reemplaza *w* por su expresión en (γ) .

(4) Por axioma Ax_2 de la Definición 1.

(5) Pues, $a_{ij} = f(v_i,v_j)$

(6) Por propiedad conmutativa de números Reales o Complejos.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \text{x } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;/\; f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_1y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$

La expresión matricial de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X^t AY$$

Si $B' = \{(2,0,0),(1,2,0),(-3,1,1)\}$ una nueva base de $\mathbb{R}^3$; la matriz A' respecto a la nueva base B' es:

$$A' = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -6 \\ 8 & -2 & -9 \\ -10 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

La expresión matricial de *f* respecto a esta nueva matriz es:

$$f[(x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -8 & -6 \\ 8 & -2 & -9 \\ -10 & 21 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X^t A'Y$$

Notas

1- Una forma bilineal *f* sobre *V* queda determinada cuando se conocen los n^2 escalares $a_{ij} = f(v_i, v_j)$,

siendo $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de *V*; es decir; la matriz $A = [a_{ij}]$ caracteriza la forma bilineal *f*.

2- Como X^tAY es una matriz de orden 1, su transpuesta coincide con la misma matriz; por lo tanto también se puede utilizar la siguiente expresión:

$$f(u,w) = X^t AY = \left(X^t AY\right)^t = Y^t A^t X$$

FORMAS BILINEALES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS

Definición 2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre el cuerpo F y $f: V \text{ x } V \to F$ una forma bilineal. Se dice que la forma bilineal f es simétrica si y sólo si

$$\forall u, v \in V;\ f(u,v) = f(v,u)$$

Definición 3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre el cuerpo F y $f: V \text{ x } V \to F$ una forma bilineal. Se dice que la forma bilineal f es antisimétrica si y sólo si

$$\forall u, v \in V;\ f(u,v) = -f(v,u)$$

Proposición 2

Una forma bilineal f sobre un espacio vectorial V es simétrica si y sólo si la matriz A que caracteriza a f es simétrica.

Demostración

I-. Si una forma bilineal respecto de V es simétrica, entonces la matriz A que caracteriza a f es simétrica.

Sea f una forma bilineal simétrica asociada a A,

$$f \text{ es simétrica} \Leftrightarrow f(u,v) = f(v,u) \Leftrightarrow X^t AY = Y^t AX \qquad (\alpha)$$

Ahora bien;

$$Y^t AX \underset{(1)}{=} (Y^t AX)^t \underset{(2)}{=} X^t A^t Y \underset{(3)}{\Longrightarrow} Y^t AX = X^t A^t Y \qquad \forall X, Y \in F^{nx1}$$

Por lo tanto: $X^t AY - X^t A^t Y = O \Rightarrow X^t (A - A^t) Y = O \underset{(4)}{\Longrightarrow} A - A^t = O \Rightarrow A = A^t$

Con lo cual A es matriz simétrica.

II-. Si la matriz A es simétrica entonces la forma bilineal asociada a A es simétrica.

$$f(u,v) \underset{(5)}{=} X^t AY \underset{(6)}{=} (X^t AY)^t \underset{(7)}{=} Y^t A^t X \underset{(8)}{=} Y^t AX \underset{(9)}{=} f(v,u)$$

Luego $\forall u, v \in V;\ f(u,v) = f(v,u)$, por lo tanto f es una forma bilineal simétrica.

Referencias

(1) Por ser el producto de $X^t AY$ una matriz de orden 1, ésta coincide con su transpuesta.

(2)Por propiedad de transpuesta.

(3)Por (α).

(4) Por ser X e Y vectores de coordenadas, son vectores no nulos.

(5) Por expresión matricial de *f*.

(6) Por ser el producto de X^tAY una matriz de orden 1, esta coincide con su transpuesta.

(7)Por propiedad de matriz transpuesta.

(8)Por ser A una matriz simétrica.

(9) Por expresión matricial de *f*.

Q.E.D

<u>Proposición 3</u>

Una forma bilineal *f* sobre un espacio vectorial *V* es antisimétrica si y sólo si la matriz *A* que caracteriza a *f* es antisimétrica.

<u>Demostración</u>

I-. Si una forma bilineal respecto de V es antisimétrica, entonces la matriz *A* que caracteriza a *f* es antisimétrica.

Sea *f* una forma bilineal antisimétrica asociada a la matriz *A*.

f es antisimétrica $\Leftrightarrow f(u,v) = -f(v,u) \Leftrightarrow X^t AY = -(Y^t AX)$ (α)

Ahora bien,

$$-(Y^t AX) \underset{(1)}{=} [-(Y^t AX)]^t \underset{(2)}{=} -(X^t A^t Y) \underset{(3)}{\Longrightarrow} X^t AY = -(X^t A^t Y) \quad \forall X, Y \in F^{nx1}$$

Por lo tanto: $X^t AY + X^t A^t Y = O \Rightarrow X^t (A + A^t) Y = O \underset{(4)}{\Longrightarrow} A + A^t = O \Rightarrow A = -A^t$

Con lo cual *A* es una matriz antisimétrica.

II-. Si la matriz *A* es antisimétrica entonces la forma bilineal asociada a la matriz *A* es antisimétrica.

$$f(u,v) \underset{(5)}{=} X^t AY \underset{(6)}{=} (X^t AY)^t \underset{(7)}{=} Y^t A^t X \underset{(8)}{=} Y^t(-A)X \underset{(9)}{=} -(Y^t AX) \underset{(10)}{=} -f(v,u)$$

Por lo tanto *f* es antisimétrica.

<u>Referencias</u>

(1) Por ser el producto de X^tAY una matriz de orden 1, ésta coincide con su transpuesta.

(2)Por propiedad de transpuesta.

(3)Por (α).

(4) Por ser X e Y vectores de coordenadas, son vectores no nulos.

(5) Por expresión matricial de *f*.

(6) Por ser el producto de X^tAY una matriz de orden 1, ésta coincide con su transpuesta.

(7)Por propiedad de matriz transpuesta.

(8)Por ser A matriz antisimétrica.

(9)Por propiedad de producto de un escalar por una matriz.

(10) Por expresión matricial de f.

Q.E.D

Ejemplo

Sea $f:\mathbb{R}^3 \mathrm{x} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f[(x_1,x_2,x_3);(y_1,y_2,y_3)] = x_1y_1 - 2x_2y_1 + x_3y_1 - 2x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_3y_2 + x_1y_3 - x_2y_3 + x_3y_3$$

Es una forma bilineal simétrica ya que su matriz asociada respecto de la base canónica es simétrica,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observaciones

1. Si $F=\mathbb{R}$ y $\bullet$ el producto interno canónico en V= R^n, entonces $f: V\times V \to \mathbb{R} \ / \ f(u,v) = u \bullet v$ (1) es una forma bilineal simétrica.

2. Si $B=\{v_1,v_2, \dots , v_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces la matriz A de la forma bilineal (1) es diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

En este caso se dice que la forma bilineal *f* asociada a la matriz *A* es diagonalizada.

Entonces

$$f(u,w) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

3. Si $B=\{v_1,v_2, \dots , v_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces la matriz A de la forma bilineal (1) es diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso se dice que la forma bilineal *f* asociada a la matriz *A* es diagonalizada.

Entonces

$$f(u, w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

III- FORMAS CUADRÁTICAS (*Sólo para Ingenierías*)

La ecuaciones cuadráticas y las formas cuadráticas que definiremos se emplean en problemas de matemática, física (en energía potencial y cinética), geometría diferencial (en la curvatura normal de las superficies), economía (en funciones de ganancia, descripción de las funciones de costo), estadística (en elipsoides de confianza), mecánica, robótica y procesamiento de imágenes, y en aplicaciones industriales.

<u>Definición 1</u>

Sean $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Una ***ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales*** es una ecuación dada por

$$ax^2+bxy + cy^2 = d, \quad \text{con} \quad |a|+|b|+|c| \neq 0$$

y en donde los escalares *a, b* y *c* son los *coeficientes*, *x* e *y* son las *variables* y el escalar *d* es el *término independiente*.

<u>Nota</u>

La condición $|a|+|b|+|c| \neq 0$ indica que al menos uno de los números *a*, *b* y *c* es diferente de cero.

<u>Definición 2</u>

Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$. Una ***forma cuadrática en dos variable****s* *x* e *y*, es una expresión dada por

$$F(x, y) = ax^2+bxy + cy^2 \qquad \text{donde } |a|+|b|+|c| \neq 0 \text{ .}$$

<u>Nota</u>

Las formas cuadráticas en dos variables se relacionan estrechamente con las secciones cónicas, las que veremos más adelante.

<u>Representación matricial de una forma cuadrática en dos variables</u>

Sean $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ y sea una forma cuadrática $F(x, y) = ax^2+bxy + cy^2$ (con $|a|+|b|+|c| \neq 0$).

Si $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, entonces $F(x, y) = v^{\,t} A\, v$

En efecto,

$$v^t A\, v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + \frac{b}{2} y \\ \frac{b}{2} x + cy \end{bmatrix} =$$

$$= ax^2 + \frac{b}{2} xy + \frac{b}{2} xy + cy^2 = ax^2 + bxy + cy^2 = F(x, y)$$

es decir $$F(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v^{\,t} A\, v$$

Esto nos indica que una *forma cuadrática en dos variables* pueden escribirse como un producto de matrices

$$F(x, y) = v^{\,t} A\, v \quad (\alpha)$$

donde A es una matriz simétrica denominada ***matriz asociada a la forma cuadrática*** F.

Recíprocamente, si A es una matriz simétrica de orden 2, entonces la ecuación (α) define una forma cuadrática en dos variables.

<u>Representación matricial de una forma cuadrática en tres variables</u>

Si $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$, una forma cuadrática con tres variables x, y, z está dada por

$F(x, y, z) = a\,x^2+b\,y^2 + c\,z^2 + d\,xy + e\,xz + f\,yz$, (con $|a|+|b|+|c|+|d|+|e|+|f| \neq 0$)

y su representación matricial es

$$F(x, y, z) = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & b & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = v^{\,t} A\, v$$

En donde se puede observar que la matriz A asociada a la forma cuadrática F, es una matriz simétrica de orden 3.

Generalizaremos este concepto con la siguiente definición

Definición 3

Una forma cuadrática con n variables es una función

$$\begin{aligned} F:\ & R^{nx1} \to R \\ & v \ \mapsto F(v) = v^t A v \end{aligned}$$

para una matriz A simétrica de orden n, llamada ***matriz asociada*** a F, y las n variables son las componentes del vector genérico $v \in \boldsymbol{R}^{nx1}$.

Nota

Empleando el producto escalar en el espacio euclídeo $\boldsymbol{R}^{nx1}$, es claro verificar que

$$v^t Av \ = \ Av \bullet v = \ v \bullet A^t v$$

Por lo que también podemos representar una forma cuadrática de los siguientes modos

$$\begin{aligned} F:\ & \boldsymbol{R}^{nx1} \to \boldsymbol{R} \\ & v \mapsto F(v) = Av \bullet v \end{aligned} \qquad \text{ó} \qquad \begin{aligned} F:\ & \boldsymbol{R}^{nx1} \to \boldsymbol{R} \\ & v \mapsto F(v) = v \bullet A^t v \end{aligned}$$

Nota

Las formas cuadráticas pueden representarse como un producto de matrices $F(x, y) = v^{\,t}Av$, sin que A sea una matriz simétrica. Pero es preferible representar toda forma cuadrática como un producto de matrices $F(x, y) = v^{\,t}Av$, con A simétrica. Veremos más adelante esta ventaja.

Representación matricial de una ecuación cuadrática en dos variables

Sean $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ y sea una ecuación cuadrática $ax^2+bxy + cy^2 = d$ con $|a|+|b|+|c| \neq 0$.

Si tomamos $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, y teniendo en cuenta las diferentes formas de representar una forma cuadrática, es claro que la representación matricial de la ecuación cuadrática

$$ax^2+bxy + cy^2 = d$$

viene dada por

$$v^{\,t} A \ v \ = \ d$$

ó por

$$Av \bullet v = d$$

ó por

$$v \bullet A^t v = d$$

FORMAS CUADRÁTICAS Y SECCIONES CÓNICAS

Definición 4

Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$ y una forma cuadrática en dos variables

$$F(x, y) = ax^2+bxy + cy^2 \text{ (con } |a|+|b|+|c| \neq 0 \text{).}$$

Si $b = 0$ diremos que la forma cuadrática F es una ***forma cuadrática en dos variables sin término mixto*** y está dada por

$$F(x, y) = ax^2+ cy^2 \quad \text{donde } |a|+|c| \neq 0 \text{ .}$$

Definición 5

Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$ y una ecuación cuadrática en dos variables

$$ax^2+bxy + cy^2 = d \text{ (con } |a|+|b|+|c| \neq 0 \text{).}$$

Si $b = 0$ diremos que la ecuación cuadrática no tiene ***término mixto*** y está dada por

$$ax^2+ cy^2 = d \quad \text{donde } |a|+|c| \neq 0 \text{ .}$$

Una ecuación cuadrática en dos variables sin término mixto casi siempre representa una circunferencia, una elipse o una hipérbola en posición canónica. Es decir que los ejes principales de esas cónicas son los ejes X e Y. En este caso la matriz A de la ecuación cuadrática es una matriz diagonal de orden 2.

Ecuaciones de circunferencia, elipse e hipéola en posición canónica

CÓNICA	ECUACIÓN	RADIO	CENTRO	FOCOS	VÉRTICES	EJES	ASÍNTOTAS	EXCENTRICIDAD
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	r	C = (0, 0)	---	---	---	---	$e = 0$
Elipse	$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ($\alpha^2 > \beta^2$)	---	C = (0, 0)	$\delta^2 = \alpha^2 - \beta^2$ $F = (\delta, 0)$ $F' = (-\delta, 0)$	$A = (\alpha, 0)$ $A' = (-\alpha, 0)$ $B = (0, \beta)$ $B' = (0, -\beta)$	Eje focal coincide con el eje x. Eje menor coincide con el eje y.	---	$e = \frac{\delta}{\alpha}$ Como $\delta < \alpha$ Entonces $0 < e < 1$
	$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ ($\alpha^2 > \beta^2$)	---	C = (0, 0)	$\delta^2 = \alpha^2 - \beta^2$ $F = (0, \delta)$ $F' = (0, -\delta)$	$A = (0, \alpha)$ $A' = (0, -\alpha)$ $B = (\beta, 0)$ $B' = (-\beta, 0)$	Eje focal coincide con el eje y. Eje menor coincide con el eje x.	---	
Hipérbola	$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	---	---	$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$ $F = (\delta, 0)$ $F' = (-\delta, 0)$	$A = (\alpha, 0)$ $A' = (-\alpha, 0)$ $B = (0, \beta)$ $B' = (0, -\beta)$	Eje focal coincide con el eje x. Eje menor coincide con el eje y.	$y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$	$e = \frac{\delta}{\alpha}$ Como $\delta > \alpha$ Entonces $e > 1$
	$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$	---	---	$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$ $F = (0, \delta)$ $F' = (0, -\delta)$	$A = (0, \alpha)$ $A' = (0, -\alpha)$ $B = (\beta, 0)$ $B' = (-\beta, 0)$	Eje focal coincide con el eje y. Eje menor coincide con el eje x.	$y = \pm\frac{\alpha}{\beta}x$	

Ejemplo 1

Dada la ecuación cuadrática $9x^2 + 16y^2 = 144$, obtenga su representación canónica y la forma matricial, describa la sección cónica que define y grafique.

La ecuación canónica es

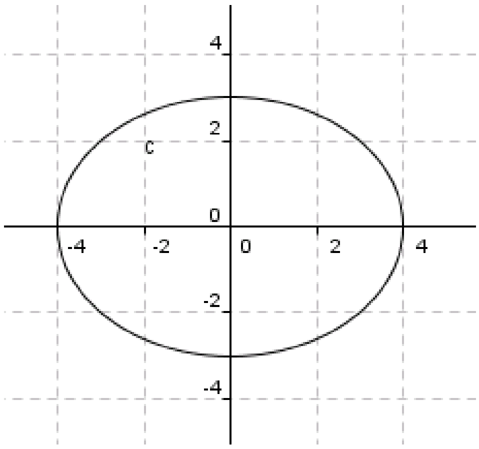
$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

La forma matricial de la ecuación cuadrática dada es

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 144$$

Donde $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica diagonal asociada a la ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática representa una elipse, con centro en (0,0) y cuyo eje focal coincide con el eje X. Sus vértices son: (4, 0), (-4, 0), (3, 0), (-3, 0) y sus focos: $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$.
Su representación gráfica es:



Ejemplo II

Dada la ecuación cuadrática $9x^2 - 4y^2 = 36$, obtenga su representación canónica y la forma matricial, describa la sección cónica que define y grafique.

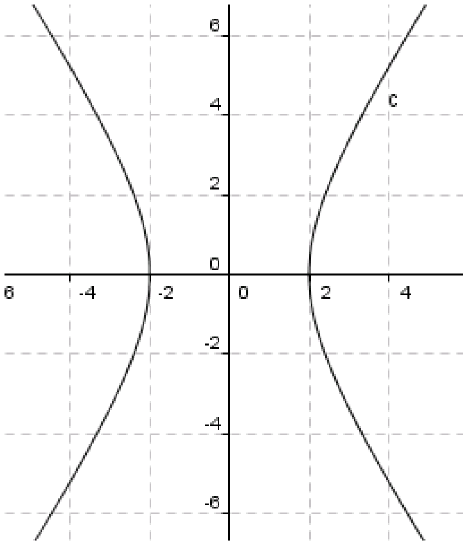
La ecuación canónica está dada por: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

La forma matricial de la ecuación cuadrática dada es

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 36$$

La ecuación cuadrática representa una hipérbola con centro en (0,0) y cuyo eje focal coincide con el eje X. Siendo sus vértices: (2,0), (-2,0), (0,3) y (0,-3) y sus focos: $\left(\sqrt{13},0\right)$, $\left(-\sqrt{13},0\right)$.

La representación gráfica de dicha cuádrica es:



Para las formas cuadráticas que poseen termino mixto es decir $b \neq 0$, se realiza un cambio de variables de modo que con respecto a las nuevas variables no haya términos mixtos. Geométricamente identifica una sección cónica rotada un ángulo respecto a los ejes x e y.

<u>Proposición 1</u>: Teorema de los ejes principales en R²

Sea $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ con $|a|+|b|+|c| \neq 0$ una ecuación cuadrática en las variables x e y. Entonces existe un número $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que la ecuación dada se puede escribir de la forma $a'x'^2 + c'y'^2 = d$

Donde x', y' son los ejes obtenidos al rotar los ejes x, y un ángulo α en el sentido contrario a las agujas del reloj. Las constantes a' y c' son los valores propios de la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

<u>Demostración</u>:

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, ésta se puede escribir

$$v^t A v = d \quad (1)$$

donde $A=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$

como A es simétrica, existe una matriz ortogonal Q tal que

$$Q^t AQ = D\,, \quad (2)$$

siendo $D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ con λ_1 y λ_2 valores propios reales de A.

Como Q es ortogonal, se tiene que $Q^t = Q^{-1}$ de modo que la expresión en (2) puede escribirse como

$$Q^{-1}AQ = D$$

multiplicando a izquierda por Q y a derecha por Q^{-1} se obtiene

$$A = QDQ^{-1}$$

finalmente

$$A = QDQ^t$$

sustituyendo la expresión obtenida para A en (1), se tiene

$$v^t(QDQ^t)v = d$$

aplicando propiedad asociativa $\quad (v^tQ)D(Q^tv) = d$

por propiedad de transpuesta $\quad (Q^tv)^t D(Q^tv) = d$

Sea $u = Q^tv$, sustituyendo en la última igualdad se tiene

$$u^t Du = d \quad (3)$$

que define una forma cuadrática. En efecto, si $u=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ entonces

$$u^t Du = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{bmatrix} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = \overline{F}(x', y')$$

donde $\overline{F}(x', y')$ es una forma cuadrática en la que falta el término cruzado $x'y'$ por lo tanto , la ecuación (3) es una ecuación cuadrática en las nuevas variables x' y y' sin el término $x'y'$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$$

Ahora bien, como Q es real y ortogonal se tiene que $\det Q = \pm 1$ [1]

Si $\det Q = -1$ es posible intercambiar las columnas de Q de modo que el determinante de la nueva matriz Q sea igual a 1.

Luego Q es la matriz de rotación $Q = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ para algún $\alpha \in [0\ 2\pi)$

Q.E.D.

Ejemplo III

Identifique la sección cónica cuya ecuación es $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$

$$F(x, y) = [x \quad y]\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1- Se obtienen los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 6)(\lambda - 4) = 0$$

de donde $\lambda_1 = 6,\ \ \lambda_2 = 4$

2- Se determinan los espacios propios asociados a los valores propios y se busca una base de cada espacio propio.

Para $\lambda_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow\ -x = y$$

luego el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 6$ es

$$E_{\lambda_1} = \left\{ (x, y) \in R^2 \ / \ y = -x \right\}$$

y una base de E_{λ_1} es $B_{\lambda_1} = \left\{ (1, -1) \right\}$

Para $\lambda_2 = 4$

[1]

$1 = \det(I_2) = \det(QQ^{-1}) = \det(QQ^t) = \det Q . \det Q^t = \det Q . \det Q = (\det Q)^2$ entonces $(\det Q)^2 = 1$ por lo que $\det Q = \pm 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

luego el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 4$ es $E_{\lambda_2} = \{(x, y) \in R^2 / x = y\}$

y una base de E_{λ_2} es $B_{\lambda_2} = \{(1,1)\}$

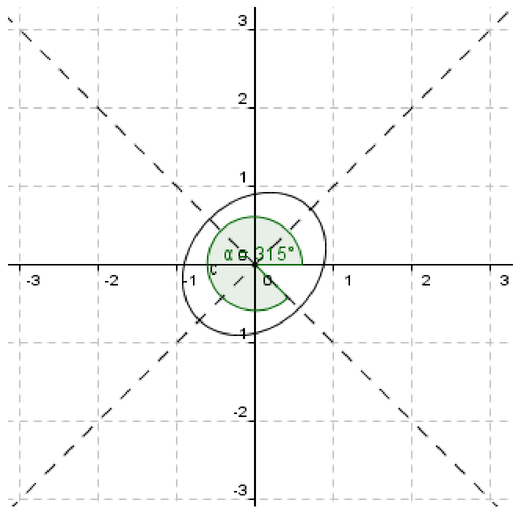
3 – Se normalizan cada uno de los vectores propios (1,-1) y (1,1) para obtener $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ***y*** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ respectivamente. Con estos vectores se forma la matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

que es la matriz de rotación de los ejes, en este caso $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y* $sen\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ por lo tanto

$$\alpha = 7\frac{\pi}{4} = 315º$$

Por el teorema de los ejes principales para R^2, la forma cuadrática $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ se transforma en $6x'^2 + 4y'^2 = 4$ al sustituir en $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$ los valores propios obtenidos.
La cónica dada es una elipse cuya gráfica se muestra a continuación



Proposición 2

Si $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ con $|a| + |b| + |c| \neq 0$, entonces la ecuación cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ es

a) una hipérbola si $d \neq 0 \wedge \det A < 0$
b) una elipse, circunferencia o sección cónica degenerada si $d \neq 0 \wedge \det A > 0$
c) un par de rectas o una sección cónica degenerada si $d \neq 0 \wedge \det A = 0$
d) un par de rectas si $d = 0 \wedge \det A \neq 0$
e) una recta si $d = 0 \wedge \det A = 0$

Demostración:

Sea la sección cónica $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Si $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ entonces el polinomio característico de *A* es:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & \lambda - c \end{vmatrix} = (\lambda - a).(\lambda - c) - \left(\frac{b^2}{4}\right) = \lambda^2 - \lambda c - \lambda a + ac - \frac{b^2}{4}$$

Si λ_1 y λ_2 son los valores propios de A, λ_1 y λ_2 son las raíces de su polinomio característico, es decir

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(a + c) + ac - \frac{b^2}{4}$$

distribuyendo en el primer miembro

$$\lambda^2 - \lambda\lambda_2 - \lambda\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - \lambda(a + c) + ac - \frac{b^2}{4}$$

sacando factor común

$$\lambda^2 - \lambda(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - \lambda(a + c) + ac - \frac{b^2}{4}$$

por igualdad de polinomios se tiene que los términos independientes son iguales

$$\lambda_1\lambda_2 = ac - \frac{b^2}{4}$$

y como $\det(A) = ac - \frac{b^2}{4}$ se tiene que

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2$$

A su vez la ecuación cuadrática se puede escribir como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$$

De ello se deduce que:

a) Si $d \neq 0$ y además $\det(A) < 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$; es decir λ_1 y λ_2 tienen diferente signo con lo cual la ecuación (2) y por lo tanto la (1) corresponden a una hipérbola

b) Si $d \neq 0$ y además $\det(A) > 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$; es decir λ_1 y λ_2 tienen igual signo la ecuación (2) y por lo tanto la (1) corresponde a:

- una circunferencia si $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \ \wedge \ \lambda_1 = \lambda_2$
- una elipse si $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \ \wedge \ \lambda_1 \neq \lambda_2$
- una cónica degenerada si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Demuestre el alumno c), d) y e)

-.-.-.-.-.-